

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řešení Laplaceovy rovnice pomocí Fourierovy
metody

Solving the Laplace equation using Fourier method

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Tater** Jméno: **Adam** Osobní číslo: **466632**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Řešení Laplaceovy rovnice pomocí Fourierovy metody

Název bakalářské práce anglicky:

Solving the Laplace equation using Fourier method

Pokyny pro vypracování:

Student se seznámí s Laplaceovou rovnicí a formulací okrajové (Dirichletovy) úlohy pro Laplaceovu rovnici. Dále provede řešení okrajové úlohy pomocí Fourierovy metody a porovná ho s numerickým řešením pomocí metody konečných diferencí na rovinných úlohách s jednodušší geometrií hranice řešené oblasti.

Seznam doporučené literatury:

Strauss, Walter A. Partial differential equations: an introduction. New York: Wiley, 2009. 978-0470-05456-7.
Fořt, Jaroslav a Neustupa, Jiří. Parciální diferenciální rovnice. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000. 80-01-02268-4.
Herrmann, Leopold. Fourierovy řady: komentované přednášky. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. 80-01-02603-5.
Kozel, Karel. Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000. 80-01-02166-1.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Jiří Holman, Ph.D., ústav technické matematiky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **16.04.2019**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18.08.2019**

Platnost zadání bakalářské práce:


Ing. Jiří Holman, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.4 2019
Datum převzetí zadání

Adam Tater
Podpis studenta

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Řešení Laplaceovy rovnice pomocí Fourierovy metody“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jiřího Holmana, Ph.D. s použitím literatury uvedené na konci bakalářské práce v seznamu použité literatury.

Dále prohlašuji, že nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....

Jméno

Příjmení

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Jiřímu Holmanovi, Ph.D. za to, že si toto téma vzal na starost, za jeho odborné vedení a vždy velmi seriózní a ochotné jednání. Dále také za jeho nesčetné rady, bez kterých by tato práce nemohla nikdy vzniknout. Chtěl bych tímto také poděkovat své rodině a přátelům za jejich trpělivost a podporu.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je seznámit se jak s Laplaceovou rovnicí, tak s jejím nehomogenním ekvivalentem, rovnicí Poissonovou a hledat jejich řešení pomocí Fourierovy metody. Dalším cílem této práce je dokázat správnost odvozených řešení a posoudit vhodnost jejich použití.

Teoretická část je rozdělena na tři části. Je zde část zabývající se obecně parciálními diferenciálními rovnicemi, část věnovaná Fourierovým řadám a část řešící problematiku numerických metod.

Praktická část se poté již zabývá samotným řešením Laplaceovy a Poissonovy rovnice Fourierovou metodou, které se poté porovnává s řešením numerickou metodou. Nakonec jsou uvedené reálné aplikace Laplaceovy a Poissonovy rovnice.

Klíčová slova

Laplaceova rovnice, Poissonova rovnice, Fourierova metoda

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to familiarize with both the Laplace equation and its non-homogeneous equivalent, the Poisson equation and to search for their solutions using the Fourier method. Another aim of this work is to show the correctness of derived solutions and to assess the suitability of their use.

The theoretical part is divided into three parts. There is a section dealing with partial differential equations in general, a part devoted to Fourier series and a part dealing with numerical methods.

The practical part deals with the solution of Laplace and Poisson equation by Fourier method, which is then compared to numerical method solution. Finally, real applications of Laplace and Poisson equations are presented.

Key words

Laplace equation, Poisson equation, Fourier method

Obsah

1 Úvod.....	1
2 Teoretický úvod do problematiky	2
2.1 Parciální diferenciální rovnice.....	2
2.1.1 Lineární PDR 2. řádu	2
2.1.1.1 Klasifikace lineárních PDR 2. řádu pro dvě proměnné ...	3
2.1.1.2 Lineární eliptické PDR.....	3
2.1.1.2.1 Laplaceova a Poissonova rovnice	4
2.2 Fourierovy řady.....	5
2.2.1 Fourierova sinová řada	8
2.2.2 Fourierova kosinová řada	8
2.3 Numerické metody.....	9
2.3.1 Řešení Poissonovy a Laplaceovy rovnice metodou sítí.....	9
2.3.2 Numerické metody řešení soustavy lineárních rovnic	13
2.3.2.1 Jacobiho metoda	15
2.3.2.2 Gauss–Seidelova metoda	16
2.3.2.3 Superrelaxační metoda (Successive overrelaxation) ..	17
3 Aplikace Fourierovy metody.....	20
3.1 Řešení Laplaceovy rovnice.....	20
3.1.1 Odvození	20
3.1.2 Testovací příklad.....	23
3.1.2.1 Část I	24
3.1.2.2 Část II	27
3.1.2.3 Část III	29
3.1.2.4 Část IV.....	32
3.1.3 Porovnání s numerickou metodou	38
3.2 Řešení Poissonovy rovnice.....	41
3.2.1 Odvození	41
3.2.2 Testovací příklad.....	45
3.2.3 Porovnání s numerickou metodou	49
4 Reálné aplikace Laplaceovy a Poissonovy rovnice.....	52
4.1 Rozložení teploty na tenké desce	52

4.2 Deformace tenké pružné membrány	54
5 Závěr.....	56
6 Literatura.....	58
7 Seznam tabulek.....	58
8 Seznam obrázků.....	59
9 Seznam použitého softwaru	59
10 Přílohy	60
10.1 C++ kód Fourierova metoda	60
10.2 C++ kód numerická metoda.....	62

Použité značení

u	hledaná funkce
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	množina přirozených čísel společně s nulou
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{R}^n	n – rozměrný Euklidovský prostor
$\mathbb{R}^{n \times n}$	$n \times n$ – rozměrný Euklidovský prostor
Ω	oblast v n – rozměrném Euklidovském prostoru
$\partial\Omega$	hranice Ω
$\bar{\Omega}$	uzávěr Ω
$C(\Omega)$	prostor funkcí definovaných v Ω , které jsou v Ω spojité
$C^1(\Omega)$	prostor funkcí definovaných v Ω , které jsou v Ω spojité spolu se svými derivacemi až prvního řádu
$C^2(\Omega)$	prostor funkcí definovaných v Ω , které jsou v Ω spojité spolu se svými derivacemi až druhého řádu
\mathcal{L}	eliptický operátor v Ω
Δ	Laplaceův operátor
$ \zeta $	Euklidovská norma vektoru ζ
\mathbf{x}	řešení soustavy lineárních rovnic
$\rho(\mathbf{B})$	spektrální poloměr matice \mathbf{B}
$\sigma(h^2)$	chyba diskretizace druhého řádu
$X(x)$	funkce závislá pouze na souřadnici x
$Y(y)$	funkce závislá pouze na souřadnici y
$X'(x)$	obyčejná derivace funkce $X(x)$
$X''(x)$	2. obyčejná derivace funkce $X(x)$
C_1, C_2, C_3, C_4	konstanta
$(C_2)_k$	konstanta C_2 závislá na k
C_k	konstanta závislá na k
$Y_k(y)$	funkce závislá na y a na k
K_1, K_2	konstanta
$T(x, y)$	rozložení teploty v rovině xy
$w(x, y)$	průhyb v rovině xy

Zkratky

PDR	parciální diferenciální rovnice
LR	Laplaceova rovnice
PR	Poissonova rovnice

1 Úvod

Motivací pro psaní této bakalářské práce byla snaha prohloubit si znalosti získané v průběhu bakalářského studia v oblasti parciálních diferenciálních rovnic a Fourierových řad, co se týče jejich řešení, použití a významu.

Cílem práce bylo ukázat, že Laplaceova a Poissonova rovnice mají svá řešení ve formě součtu nekonečných řad, a tato řešení budou výpočetně méně náročná, než by tomu bylo u numerických metod, v jejichž případě jsou výpočty často velmi zdlouhavé.

Práce začíná rešerší jednotlivých matematických oddílů, které jsou pro tuto práci důležité a se kterými se dále v praktické části operuje. Práce začíná statí o parciálních diferenciálních rovnicích, kde se postupem od nejobecnější definice parciálních diferenciálních rovnic logicky dostáváme až k Laplaceově a Poissonově rovnici. Na tuto kapitolu navazuje část, kde je odvozena Fourierova řada a uvedeny všechny důležité informace ohledně tohoto tématu. Dále jako poslední teoretická část je v této práci uvedeno několik odstavců o numerických metodách, které se zaměřují na numerické metody běžně užívané pro výpočet Laplaceovy a Poissonovy rovnice, tedy metodě sítí a poté superrelaxační metodě pro zpracování velkých řídkých soustav lineárních rovnic metodou sítí vznikajících.

Po teoretické rešerši pokračuje tato práce již aplikací Fourierovy metody nejprve obecně pro Laplaceovu rovnici, a poté již konkrétně na zvolený testovací příklad. Následovně je totožný příklad řešen numerickou metodou a tyto dva výsledky jsou porovnány a hodnoceny na základě různých kritérií.

Další částí této práce je aplikace Fourierovy metody na řešení nehomogenní Laplaceovy rovnice, tedy rovnice Poissonovy. V této statí je stejně jako v případě Laplaceovy rovnice nejdříve tato metoda nastíněna obecně a až poté je aplikována na konkrétně zvolený testovací příklad. Dále je tento testovací příklad řešen také numerickou metodou a tyto dva výsledky jsou porovnány.

V poslední části je uvedeno několik příkladů využití Laplaceovy a Poissonovy rovnice při modelování fyzikálních problémů. Následně je vyřešen Fourierovou metodou jeden reálný případ využití Laplaceovy rovnice a jeden případ využití Poissonovy rovnice.

V závěru jsou poté shrnuty dosažené výsledky a tato práce je zhodnocena jako celek.

2 Teoretický úvod do problematiky

2.1 Parciální diferenciální rovnice

Hlavním definujícím atributem parciálních diferenciálních rovnic je podle [1] výskyt více než jedné nezávislé proměnné x_1, x_2, \dots , jedné neznámé závislé funkce $u(x_1, x_2, \dots)$ a jejích parciálních derivací. PDR poté můžeme definovat jako entitu dávající do vztahů nezávislé proměnné, závislou proměnnou $u(x_1, x_2, \dots)$ a její parciální derivace. Řešením PDR nazýváme právě funkci $u(x_1, x_2, \dots)$, která musí PDR vyhovovat alespoň na určité oblasti. Například nejobecnějším tvarem parciální diferenciální rovnice dvou proměnných prvního řádu je

$$F\left(x_1, x_2, u(x_1, x_2), \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = 0. \quad (1)$$

Řádem PDR dle [1] nazýváme nejvyšší derivaci, která se v rovnici vyskytuje. Tato práce se dále zabývá PDR druhého řádu.

2.1.1 Lineární PDR 2. řádu

V přírodních vědách se dle [2] často setkáváme s matematickými modely fyzikálních jevů ve formě PDR druhého řádu. Zachováme nyní značení z předchozího odstavce, tudíž nazveme naší neznámou funkci u a budeme předpokládat, že závisí na proměnných x_1, x_2, \dots, x_n . Pro zjednodušení zápisu zavedeme označení $X = [x_1, \dots, x_n]$. Obecný tvar lineární PDR druhého řádu poté je dle [2]

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X). \quad (2)$$

O funkcích a_{ij} , b_i , c a f předpokládejme, že jsou definovány v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a dále, že následující výraz

$$A(X) = \begin{pmatrix} a_{11}(X), & \cdots, & a_{1n}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(X), & \cdots, & a_{nn}(X) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

je nenulovou a symetrickou maticí ve všech bodech $X \in \Omega$.

2.1.1.1 Klasifikace lineárních PDR 2. řádu pro dvě proměnné

Tato práce se zabývá pouze malou částí lineárních PDR 2. řádu. Budeme řešit pouze dvoudimenzionální, jinak řečeno rovinné případy, což lze považovat za značné zjednodušení. Z toho vyplývá, že hledaná funkce u je podle [2] funkcí dvou nezávislých proměnných, kde $X = [x_1, x_2]$. V tomto případě existuje jednoduché kritérium pro určení typu rovnice. Provedeme přeznačení do nám známého kartézského souřadného systému, tudíž $X = [x, y] \sim [x_1, x_2]$. Nyní můžeme dle [2] psát rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} a(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(X) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(X) \frac{\partial u}{\partial x} + e(X) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + g(X)u = f(X). \end{aligned} \quad (4)$$

Položme $D = b^2(X) - 4a(X)c(X)$. Je dokázáno ^{[1] s.28-29}, že rovnice (4) je v bodě X

- I. eliptická, pokud $D < 0$,
- II. hyperbolická, pokud $D > 0$,
- III. parabolická, pokud $D = 0$ a zároveň vektory $(2a(X), b(X))$, $(b(X), 2c(X))$, a $(d(X), e(X))$ nejsou všechny rovnoběžné.

2.1.1.2 Lineární eliptické PDR

Předpokládejme podle [2], že Ω je oblast v \mathbb{R}^n a označme

$$(\mathcal{L}u)(X) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j}(X) \right] + \sum_{j=1}^n b_j(X) \frac{\partial u}{\partial x_j}(X) + c(X)u(X). \quad (5)$$

Také předpokládáme, že

- a) $a_{ij} \in C^1(\Omega) \forall i, j = 1, \dots, n$, $b_j \in C(\Omega) \forall j = 1, \dots, n$ a $c \in C(\Omega)$,
- b) $a_{ij}(X) = a_{ji}(X) \forall i, j = 1, \dots, n$ a $\forall X \in \Omega$,
- c) $\exists \omega > 0$ takové, že $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \zeta_i \zeta_j \geq \omega |\zeta|^2 \forall \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ a $\forall X \in \Omega$.

Tyto předpoklady a) až c) nám podle [2] zajišťují, že rovnice

$$\mathcal{L}u = f, \quad (6)$$

kde f je funkce v oblasti Ω , je eliptického typu v Ω . Operátor \mathcal{L} vyhovující všem uvedeným předpokladům tedy nazýváme eliptickým operátorem v oblasti Ω [2].

Pro rovnici (6) je dle [2] možno formulovat několik okrajových úloh. V případě této práce budeme řešit vnitřní Dirichletovu úlohu, která je definována následovně.

Nechť Ω je omezená oblast v \mathbb{R}^n , $f \in C(\bar{\Omega})$ a $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Hledáme funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, která je řešením rovnice (6) v oblasti Ω a na hranici Ω vyhovuje Dirichletově okrajové podmínce, tedy

$$u(X) = \varphi(X) \forall X \in \partial\Omega. \quad (7)$$

V této práci se dále soustředíme pouze na případy, kdy eliptický operátor \mathcal{L} přechází v Laplaceův operátor.

2.1.1.2.1 Laplaceova a Poissonova rovnice

Pokud nám eliptický operátor \mathcal{L} přechází v Laplaceův operátor Δ , stává se nám z rovnice (6) podle [2], rovnice následující

$$\Delta u = f. \quad (8)$$

Tuto rovnici nazýváme Poissonovou rovnicí. Pro názornost rozepíšeme Laplaceův operátor Δ a rovnici napíšeme v rovinných souřadnicích $X = [x, y]$. Po této formální úpravě vypadá Poissonova rovnice následujícím způsobem

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (9)$$

Dále v této práci se Poissonova rovnice bude řešit právě v tomto tvaru.

Laplaceova rovnice je dle [1], nebo [2] jedním z případů Poissonovy rovnice. Pokud položíme funkci f rovnou nule a Poissonovu rovnici zapíšeme ve tvaru rovnice (8), můžeme o Laplaceově rovnici z tohoto hlediska tvrdit, že je homogenní Poissonovou rovnicí. Takto modifikovaná Poissonova rovnice vypadá následovně

$$\Delta u = 0, \quad (10)$$

a nazýváme ji Laplaceovou rovnicí. Pokud tuto rovnici rozepíšeme do složek obdobně jako se tomu stalo v případě rovnice (9), dostáváme dle [1], nebo [2]

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

Stejně jako v případě rovnice (9) je to právě tento tvar, který budeme dále využívat.

2.2 Fourierovy řady

Fourierovy trigonometrické řady podle [1], nebo [3] jsou řady funkcí a zároveň speciálním případem trigonometrických řad, ve kterých jsou koeficienty určeny pomocí integrovatelné funkce. Joseph Fourier formoval tyto myšlenky na případech konvergence trigonometrických řad při studiu tepelných toků [1].

Dříve než ovšem uvedeme konkrétní tvar Fourierovy řady, musíme definovat několik termínů, na kterých Fourierovy řady stojí a byly již zmíněny v předešlém odstavci. Řekli jsme, že Fourierova řada je řada funkcí. Taková řada obecně dle [3] vypadá následovně

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad (12)$$

kde f_k jsou funkce definované na určité podmnožině \mathbb{R} . Mezi dva nejdůležitější případy řad funkcí patří řady mocninné a řady trigonometrické. Nás budou dále zajímat právě trigonometrické řady funkcí, pro které výraz $f_k(x)$ z výrazu (12) vypadá podle [3] následovně

$$f_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}). \quad (13)$$

Částečné součty se v tomto případě nazývají trigonometrické polynomy.

Uvažujme možnost reprezentace funkce f pomocí součtu trigonometrické řady dle [3] následujícím způsobem

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (14)$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ je třeba určit. Povšimněme si, že vyjádření absolutního členu $\frac{a_0}{2}$ nevychází z vyjádření nultého členu řady, nýbrž jde o formální zápis, který nám umožní psát výsledné vzorce pro a_k jednotně.

Předpokládejme dle [3], že máme funkci f , která je $2L$ -periodická a na celé délce periody integrovatelná. Poté i funkce tvaru $f(x) \cos \frac{m\pi x}{L}$ a $f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$ je integrovatelná a $2L$ -periodická.

Koeficienty a_k a b_k najdeme za pomoci relací ortogonálnosti [3] s.13 a za následujících dvou předpokladů:

- řada konverguje k $f(x)$,
- řadu lze po vynásobení $\cos \frac{m\pi x}{L}$, kdy $m \in \mathbb{N}_0$ a $\sin \frac{m\pi x}{L}$, kdy $m \in \mathbb{N}$, integrovat člen po členu přes interval délky periody.

Postupným vynásobením vztahu (14) funkcemi $\cos \frac{m\pi x}{L}$, $m \in \mathbb{N}$, a integrací přes interval $[-L, L]$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

S použitím relací ortogonálnosti podle [3] zjistíme, že jediný nenulový člen na pravé straně je člen v první řadě, pokud $k = m$, tedy

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = La_m. \quad (16)$$

Pro $m = 0$ poté dostáváme

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx = La_0. \quad (17)$$

Naprostou stejnou logikou bychom vynásobením vztahu (14) funkcemi $\sin \frac{m\pi x}{L}$, $m \in \mathbb{N}$, dostali

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = Lb_m. \quad (18)$$

Koeficienty a_0 , a_m a b_m z rovnic (16), (17) a (18) nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f .

Nyní již máme vše potřebné pro zapsání Fourierovy řady v jejím známém tvaru. Předpokládejme, že funkce f je $2L$ -periodická a integrovatelná po celé délce periody. Dále musíme udělat předpoklad, že řada konverguje [3] s.23-27. Poté již můžeme dle [1], nebo [3] psát, že

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (19)$$

kde

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (20)$$

a dále

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

2.2.1 Fourierova sinová řada

Uvažujme funkci f zadanou na intervalu $\langle 0, L \rangle$ a integrovatelnou na tomto intervalu s výjimkou konečného počtu bodů. Fourierova řada lichého $2L$ -periodického prodloužení funkce f se nazývá Fourierova sinová řada funkce f , jelikož její tvar je podle [3]

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (22)$$

kde

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Integrovat pouze přes půl periody a násobit integrál dvěma v rovnici (23) si můžeme dovolit, jelikož součin liché funkce f a liché funkce $\sin \frac{k\pi x}{L}$ je dle [3] sudá funkce.

2.2.2 Fourierova kosinová řada

Uvažujme funkci f zadanou na intervalu $\langle 0, L \rangle$ a integrovatelnou na tomto intervalu s výjimkou konečného počtu bodů. Fourierova řada sudého $2L$ -periodického prodloužení funkce f se nazývá Fourierova kosinová řada funkce f , jelikož její tvar je podle [3]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (24)$$

kde

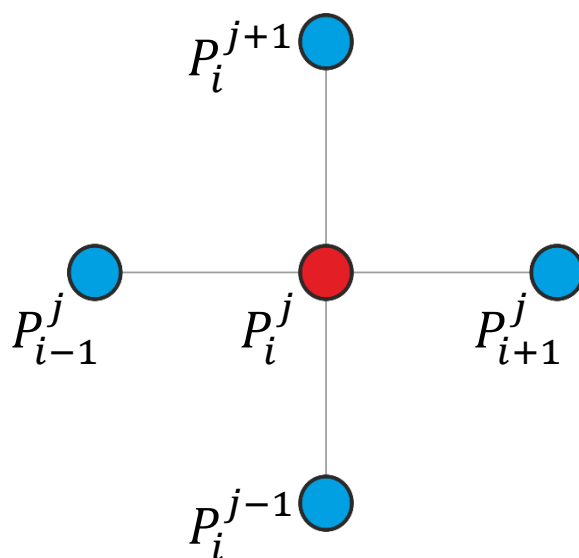
$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (25)$$

Integrovat pouze přes půl periody a násobit integrál dvěma v rovnici (25) si můžeme dovolit, jelikož součin sudé funkce f a sudé funkce $\cos \frac{k\pi x}{L}$ je dle [3] sudá funkce.

2.3 Numerické metody

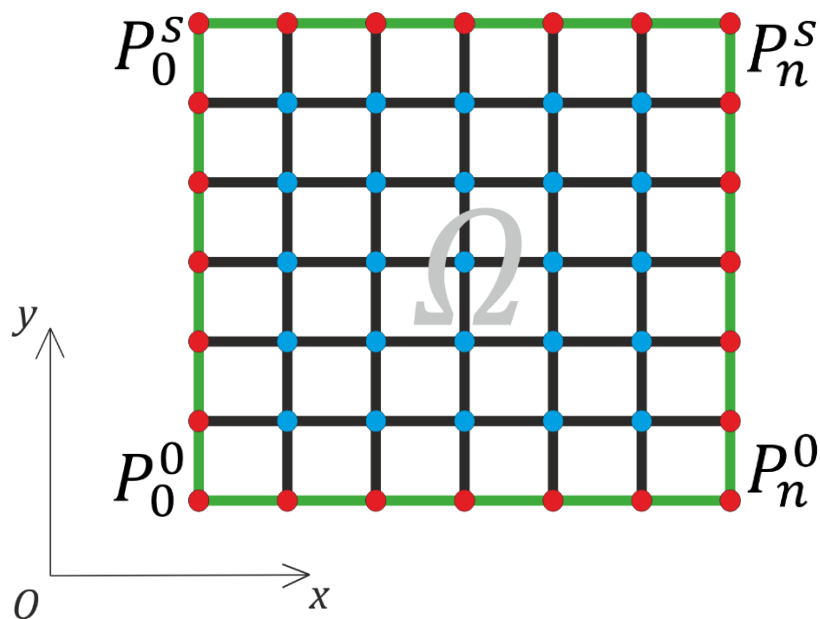
2.3.1 Řešení Poissonovy a Laplaceovy rovnice metodou sítí

Je dána Dirichletova úloha na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$, která je jednoduše souvislá a jejíž hranici $\partial\Omega$ tvoří po částech hladká křivka (zelená křivka), viz obrázek 2. Sít na oblasti Ω budeme konstruovat podle [5] následujícím způsobem. Necht bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je pevně zvolený bod a číslo h je kladné. Pro $i = 0, 1, \dots, n$ a $j = 0, 1, \dots, s$ označíme $x_i = x_0 + ih$ a $y_j = y_0 + jh$. Sítí v \mathbb{R}^2 nazveme množinu všech bodů $P_i^j = [x_i, y_j]$. Bodům P_i^j říkáme uzly sítě. Přímký o rovnicích $x = x_i$ a $y = y_j$ nazýváme síťové přímky a číslo h je krokem naší sítě. Uzly $P_{i+1}^j, P_{i-1}^j, P_i^{j+1}$ a P_i^{j-1} jsou sousedními uzly k uzlu P_i^j , viz obrázek 1.



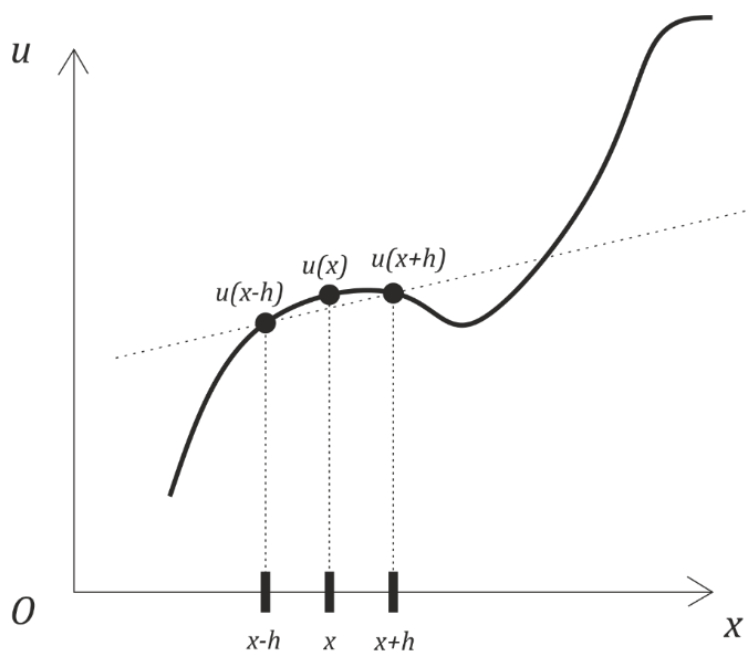
Obrázek 1 - Sousední uzly

Regulárním uzlem sítě nazveme dle [5] uzel P_i^j jestliže všechny otevřené úsečky spojující uzel P_i^j s jeho sousedními uzly leží celé v oblasti Ω (modré body), viz obrázek 2. Hrančním uzlem nazveme dle [5] takový uzel, který leží na síťové přímce a zároveň na hranici oblasti (červené body), viz obrázek 2. V případě této práce se budeme zabývat pouze oblastmi, kde se vyskytují regulární a hraniční uzly, neregulárními uzly a náhradami k jejich řešení používaných řešit nebudeme.



Obrázek 2 - Síť na oblasti Ω

Diskretizace Poissonovy a Laplaceovy rovnice probíhá nahrazením druhých derivací centrální diferencí dle [5]. Označme nyní u_i^j hodnotu přesného řešení Dirichletovy úlohy v uzlu P_i^j , a tak dále analogicky u všech uzlů. Vyřešíme nyní tento problém pro směr osy x a pro názornost začneme prvními derivacemi. Z obrázku 3 můžeme



Obrázek 3 - Centrální diference

psát, že schéma centrální difference je dle [4]

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \sigma(h^2). \quad (26)$$

Z hlediska numerického řešení limita znamená, že se budeme snažit krok h nastavit „malý“ vzhledem k oblasti. Za tohoto předpokladu při převedení do námi zavedeného značení a zanedbání vzniklé chyby $\sigma(h^2)$, můžeme psát

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \quad (27)$$

Jelikož Poissonova i Laplaceova rovnice operuje s druhými derivacemi, potřebujeme nahradit právě je. Můžeme u toho postupovat obdobně jako u nahrazení první derivace. Nejprve rozepíšeme druhou derivaci jako dvě derivace první, a dále se k vnitřní derivaci budeme chovat jako k argumentu a nahradíme vnější derivaci podle rovnice (26). Jediným rozdílem je použití polovičního kroku $h/2$. Dále již jen nahradíme obě složky rozdílu v dělenci opět podle rovnice (26) s polovičním krokem $h/2$. Předpokládejme, že krok h je „malý“, tudíž odstraníme limitu a připsíme chybu diskretizace $\sigma(h^2)$. Po algebraických úpravách získáváme výsledek nahrazení druhé derivace následovně

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^j}{\partial x} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u_{i+1/2}^j}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u_{i-1/2}^j}{\partial x} \right)}{h} = \\ &= \frac{\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} - \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}}{h} + \sigma(h^2) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \sigma(h^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Zcela analogicky bychom odvodili nahrazení druhé derivace ve směru y . Nyní, když zanedbáme chybu diskretizace $\sigma(h^2)$ a řekneme, že hodnoty U_i^j ,

$U_{i-1}^j, U_{i+1}^j, U_i^{j-1}$ a U_i^{j+1} jsou přibližnými hodnotami řešení Dirichletovy úlohy v uzlech $P_i^j, P_{i-1}^j, P_{i+1}^j, P_i^{j-1}$ a P_i^{j+1} , můžeme dle [5] psát

$$\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}, \quad (29)$$

a analogicky pro směr osy y píšeme

$$\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial y^2} = \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{h^2}. \quad (30)$$

Když nyní dosadíme do Poissonovy rovnice (9) náhrady druhých derivací podle rovnic (29) a (30), dostáváme

$$\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} + \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{h^2} = f_i^j, \quad (31)$$

a po několika algebraických úpravách dostáváme v souladu s [1], nebo [5]

$$U_i^j = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1} - h^2 f_i^j}{4}, \quad (32)$$

což je rovnice pro výpočet přibližného řešení U_i^j Poissonovy rovnice v uzlu P_i^j . Pokud chceme z rovnice (32) získat rovnici pro výpočet přibližného řešení U_i^j Laplaceovy rovnice v uzlu P_i^j , stačí vyjít ze znalosti rovnice (11) a položit $f_i^j = 0$. Po této úpravě můžeme již psát rovnici pro výpočet přibližného řešení Laplaceovy rovnice takto

$$U_i^j = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1}}{4}. \quad (33)$$

Rovnice (32) a (33) generují soustavy lineárních rovnic řešené v další části.

2.3.2 Numerické metody řešení soustavy lineárních rovnic

Tyto metody nazýváme maticovými iteračními metodami a jsou výhodným způsobem, jak řešit rozsáhlé a řídké soustavy lineárních rovnic, které vznikají při numerickém řešení, jak Laplaceovy a Poissonovy rovnice, tak jiných technických aplikací. Dle [4], nebo [7] spočívají ve vytvoření posloupnosti vektorů $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ takové, že musí platit $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, kde $\bar{\mathbf{x}}$ je přesné řešení dané soustavy lineárních rovnic. Danou posloupnost vytvoříme následujícím způsobem

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = F(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)}), \quad (34)$$

který popisuje obecnou stacionární m -bodovou iterační metodu. Stacionární proto, že funkce F se po čas průběhu iterací nemění, tudíž nezávisí na k . Omezíme se pouze na případy, kdy je F lineární funkcí, jelikož analýza nelineárních metod je složitá, a tyto metody mají dle [4] sklon k neefektivnosti. Dále se budeme tudíž věnovat pouze lineárním maticovým iteračním metodám, které píšeme podle [4] ve tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad (35)$$

kde matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou neměnné v průběhu iterací. Iterační metodu ve tvaru rovnice (35) lze odvodit z maticového zápisu soustavy lineárních rovnic který dle [4], nebo [6] vypadá následovně

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (36)$$

Tento zápis lze po složkách rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Když nyní přičteme k oběma stranám rovnice (36) \mathbf{x} , dostáváme po vytknutí

$$(E + A)x = x + b. \quad (38)$$

Pokud nyní odečteme b od obou stran rovnice, můžeme již psát tento výraz podobající se rovnici (35) jako

$$x = (E + A)x - b, \quad (39)$$

z této rovnice je poté logické uvažovat iterační metodu ve tvaru

$$x^{(k+1)} = (E + A)x^{(k)} - b, \quad (40)$$

což odpovídá po zobecnění rovnici (35). Po této iterační metodě požadujeme, aby přesné řešení \bar{x} bylo dle [4] pevným bodem rovnice (35), tudíž musí platit

$$\bar{x} = B\bar{x} + c, \quad (41)$$

a víme, že z rovnice (36) vyplývá vztah $\bar{x} = A^{-1}b$. Pokud tento vztah do rovnice (41) dosadíme, dostáváme

$$A^{-1}b = BA^{-1}b + c, \quad (42)$$

a po úpravách

$$c = (E - B)A^{-1}b = Cb. \quad (43)$$

Pro matici C tedy platí, že $C = (E - B)A^{-1}$ jinak napsáno $B + CA = E$, tento vztah nazýváme dle [4] podmínkou konzistence matic B a C . Iterační metodu tedy nakonec zapíšeme v tomto tvaru

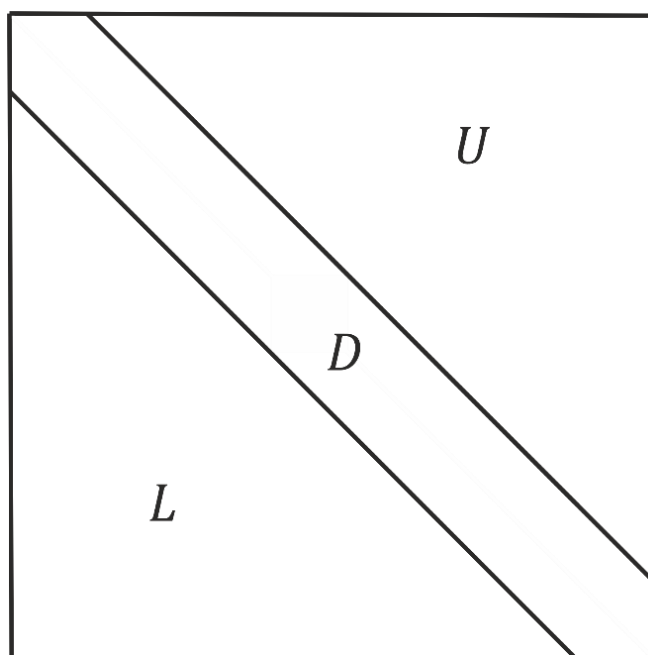
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + Cb, \quad (44)$$

což je schéma prosté iterační metody, která se sice v technických výpočtech prakticky nevyužívá, ovšem další, výkonnější metody, které

budou vedeny v následujících podkapitolách, mají stejný formální zápis, pouze jejich matice B a C se budou měnit.

2.3.2.1 Jacobiho metoda

Tato metoda je vylepšením prosté iterace a spočívá v rozložení matice A z rovnice (36) na její tři části podle [6], viz obrázek 4.



Obrázek 4 - Rozdělení matice A

Matematicky je tato skutečnost popsána následovně

$$A = L + D + U, \quad (45)$$

kde matice L je ostře dolní trojúhelníková, matice D je matice hlavní diagonály a matice U je matice ostře horní trojúhelníková. Dosazením vztahu z rovnice (45) do rovnice (36) dostáváme podle [4]

$$(L + D + U)x = b, \quad (46)$$

po úpravách můžeme psát, že

$$Dx = (L + U)x + b, \quad (47)$$

a následně po osamostatnění x na levé straně rovnice

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b. \quad (48)$$

Je tedy logické uvažovat Jacobiho iterační metodu podle [4] ve tvaru

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad (49)$$

a po rozepsání do složek jako

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Matice B a C z rovnice (44) mají v případě Jacobiho metody tvar

$$B_J = -D^{-1}(L + U), \quad C_J = D^{-1}. \quad (51)$$

Jacobiho iterační metoda konverguje dle [4] pro libovolně zvolenou počáteční iteraci právě tehdy, když $\rho(B_J) < 1$.

2.3.2.2 Gauss–Seidelova metoda

Gauss-Seidelova iterační metoda vychází z Jacobiho metody. Liší se pouze tím, že místo toho abychom v každé iteraci počítali s hodnotami předchozí iterace, používáme již vypočtené členy v právě aktuální iteraci. Tato skutečnost však značně zrychluje konvergenci metody. Analogicky podle [4] provedeme rozepsání jako v rovnici (46) ovšem další krok je již odlišný, jelikož používáme prvky vypočtené

v probíhající iteraci, jinak řečeno, používáme pro výpočet aktuální matice \mathbf{L} , píšeme tedy, že

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (52)$$

a následně po osamostatnění \mathbf{x} na levé straně rovnice

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}. \quad (53)$$

Analogicky jako v předchozích případech již můžeme psát finální podobu metody dle [4] ve tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}, \quad (54)$$

a při rozepsání po složkách dostaneme

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (55)$$

Matice \mathbf{B} a \mathbf{C} z rovnice (44) mají v případě Gauss-Seidelovy metody tvar

$$\mathbf{B}_{GS} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}, \quad \mathbf{C}_{GS} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}. \quad (56)$$

Gauss-Seidelova iterační metoda konverguje dle [4] pro libovolně zvolenou počáteční iteraci právě tehdy, když $\rho(\mathbf{B}_{GS}) < 1$.

2.3.2.3 Superrelaxační metoda (Successive overrelaxation)

Tato iterační metoda je úpravou Gauss-Seidelovy metody při které se podle [4], nebo [7] upřednostňuje rychlost konvergence. Jelikož rychlost konvergence dle [4] závisí na spektrálním poloměru iterační matice \mathbf{B} , je přirozené uvažovat nad jakoukoli úpravou iterační matice, která by vedla ke zmenšení spektrálního poloměru iterační matice, a tudíž ke zrychlení

konvergence. Tuto myšlenku reflektuje právě superrelaxační metoda, která počítá další iteraci jako lineární kombinaci předešlé iterace a členu násobeného relaxačním faktorem ω . Člen upravovaný tímto faktorem je tvořen jako rozdíl $\mathbf{x}^{(k+1)}$ a $\mathbf{x}^{(k)}$ vypočtených podle Gauss-Seidelovy iterační metody. Tento vztah se dá dle [4], [6], nebo [7] zapsat následovně

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(k)}). \quad (57)$$

Pokud bychom tuto rovnici pomocí algebraických úprav transformovali do tvaru rovnice (44), vyšel by nám následující výraz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}. \quad (58)$$

Matice \mathbf{B} a \mathbf{C} z rovnice (44) mají v případě superrelaxační metody tvar

$$\mathbf{B}_{SR} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}], \quad \mathbf{C}_{SR} = \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}, \quad (59)$$

a superrelaxační metoda konverguje dle [4] právě tehdy, když $\rho(\mathbf{B}_{SR}) < 1$. Ze vztahů (59) je dále patrné, že superrelaxační metoda přechází při $\omega = 1$ v Gauss-Seidelovu metodu. Jinými slovy, Gauss-Seidelova metoda je speciálním případem metody superrelaxační [4]. Hodnoty faktoru ω je obecně nutno zjišťovat experimentálně. Pokud je však matice pozitivně definitní můžeme podle [4] psát, že metoda konverguje pro jakoukoli počáteční iteraci při volbě relaxačního faktoru $\omega \in (0; 2)$. Optimální hodnotu ω můžeme dle [7] získávat jako

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{B})^2}}, \quad (60)$$

kde $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{GS} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$. V případě řešení Laplaceovy nebo Poissonovy rovnice na obdélníkové oblasti dělení h a rozměrů L a S je možno psát

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{N_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N_y}\right) \right), \text{ kde } N_x = \frac{L}{h} \text{ a } N_y = \frac{S}{h}. \quad (61)$$

Pokud nyní spojíme poznatky z rovnice (32), superrelaxační metodu a mírně transformujeme značení tak, že dolní index je vyhrazen pro prostorové indexy a horní index je iterační. Můžeme poté již psát finální iterační rovnici vhodnou pro strojový výpočet Poissonovy rovnice jako

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \omega \left(\frac{U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^{k+1} - h^2 f_{i,j}}{4} - U_{i,j}^k \right). \quad (62)$$

Pokud bychom použili rovnici (33), dostali bychom pro Laplaceovu rovnici iterační rovnici následující

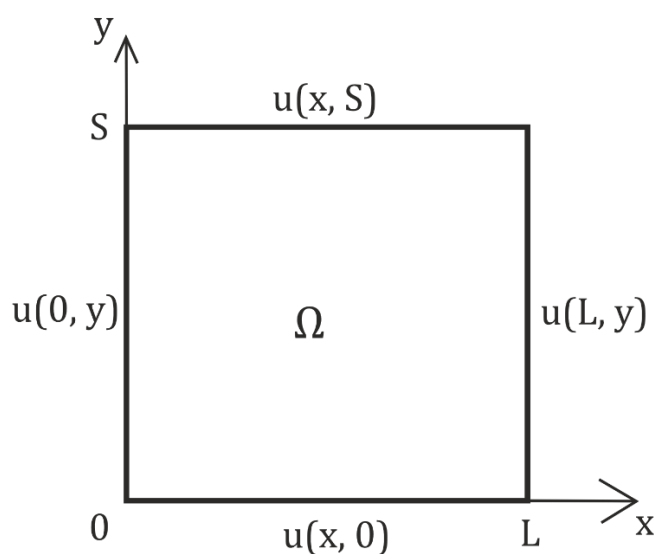
$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \omega \left(\frac{U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^{k+1}}{4} - U_{i,j}^k \right). \quad (63)$$

3 Aplikace Fourierovy metody

3.1 Řešení Laplaceovy rovnice

3.1.1 Odvození

Mějme Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici zadanou na oblasti Ω viz obrázek 5.



Obrázek 5 - Oblast řešení

Laplaceova rovnice je na oblasti Ω zadána následujícím způsobem

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (64)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} x \in \langle 0, L \rangle & \begin{cases} u(x, 0) = u_1 \\ u(x, S) = u_2 \end{cases}, \\ y \in \langle 0, S \rangle & \begin{cases} u(0, y) = u_3 \\ u(L, y) = u_4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Celé řešení dále stojí na faktu, že funkci $u(x, y)$ můžeme zapsat jako součin dvou funkcí $X(x)$ a $Y(y)$, které jsou pouze funkcemi jediné proměnné.

Tuto skutečnost můžeme podle [1] psát jako

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (65)$$

Pokud výraz z rovnice (65) dosadíme do rovnice (64) dostáváme, že

$$\frac{\partial^2(X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(X(x)Y(y))}{\partial y^2} = 0, \quad (66)$$

pokud nyní převedeme jeden z podílů na druhou stranu rovnice a uvědomíme si, které funkce v součinech nejsou funkcemi proměnných, podle kterých součin derivujeme, tedy píšeme

$$Y(y) \frac{\partial^2(X(x))}{\partial x^2} = -X(x) \frac{\partial^2(Y(y))}{\partial y^2}. \quad (67)$$

Jelikož v rovnici (67) derivujeme již pouze funkce jedné proměnné přecházejí parciální derivace v derivace obyčejné, tedy můžeme provést přeznačení a všechny členy závislé na x převést na levou stranu a všechny členy závislé na y na stranu pravou, poté

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (68)$$

Podíly na levé i pravé straně rovnice (68) se musejí rovnat právě konstantě, aby tato rovnice byla platná. Tuto konstantu budeme psát ve tvaru $-\alpha^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Tento tvar je zvolen z důvodu, který bude zjevný později. Rozepíšeme tedy rovnici (68) jako

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konst.} = -\alpha^2, \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konst.} = -\alpha^2, \quad (69)$$

dále se zbavíme podílu a převedeme oba členy rovnic na levou stranu. Poté

můžeme psát rovnice (69) upravené do následujícího tvaru

$$X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) - \alpha^2 Y(y) = 0, \quad (70)$$

což je kanonický tvar obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které budeme řešit skrze charakteristické rovnice, následujícím způsobem

$$\lambda_x^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda_y^2 - \alpha^2 = 0, \quad (71)$$

a tedy kořeny charakteristických rovnic jsou

$$\lambda_x^{1,2} = \pm \alpha i, \quad \lambda_y^{1,2} = \pm \alpha. \quad (72)$$

Pokud nyní dosadíme kořeny charakteristické rovnice do předpisu řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, dostáváme tvary řešení funkcí

$$X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x), \quad Y(y) = C_3 e^{\alpha y} + C_4 e^{-\alpha y}, \quad (73)$$

a pokud tyto tvary řešení dosadíme do rovnice (65), dostaneme předpis pro funkci $u(x, y)$, který poté vypadá následovně

$$u(x, y) = [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)][C_3 e^{\alpha y} + C_4 e^{-\alpha y}]. \quad (74)$$

Nyní vidíme, že potřebujeme pouze dořešit čtyři konstanty s tím, že máme čtyři okrajové podmínky. Postup řešení konstant se liší podle složitosti okrajových podmínek a složité případy s více než jednou nenulovou okrajovou podmínkou se podle [1] řeší rozkladem na případy se třemi nulovými okrajovými podmínkami a následným sečtením viz obrázek 6.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline u_2 & & \\ \hline u_3 & & u_4 \\ \hline u_1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline & u_1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & \\ \hline 0 & & u_4 \\ \hline & 0 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_2 & & \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline & 0 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & \\ \hline u_3 & & 0 \\ \hline & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Obrázek 6 - Rozložení okrajových podmínek

3.1.2 Testovací příklad

Mějme Laplaceovu rovnici zadanou předpisem z rovnice (64) a oblast řešení Ω s okrajovými podmínkami dle obrázku 5. Nyní již přesně zadáme spojité okrajové podmínky jako lineární funkce takto

$$x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = x/2 \\ u_2 = 1 - x/2 \end{cases}, L = 2,$$

$$y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = y \\ u_4 = 1 - y \end{cases}, S = 1.$$

Vidíme, že všechny čtyři okrajové podmínky jsou nenulové, budeme tedy muset v souladu s postupem uvedeným na obrázku 6 rozložit řešení testovacího příkladu na součet čtyř částí, kde každá z nich bude mít tři nulové okrajové podmínky. Rozdělení je provedeno následovně

- část I

$$x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = x/2 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

$$y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases},$$

- část II

$$x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 - x/2 \end{cases}$$

$$y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases},$$

- část III

$$x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

$$y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = y \\ u_4 = 0 \end{cases},$$

- část IV

$$x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

$$y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 1 - y \end{cases}.$$

3.1.2.1 Část I

Při dalším řešení vyjdeme z odvozené rovnice (74) a postupným dosazováním okrajových podmínek se budeme snažit o získání konstant, a tudíž i řešení. Nejprve dosadíme okrajovou podmínku u_3 . Poté můžeme psát, že

$$u_3 = 0 = C_1 \underbrace{(C_3 e^{\alpha y} + C_4 e^{-\alpha y})}_{Y(y)} \rightarrow C_1 = 0. \quad (75)$$

Máme tedy dořešenou konstantu C_1 a budeme pokračovat v dosazování okrajových podmínek. Jako další v pořadí dosadíme okrajovou podmínku u_4 , a jelikož již známe konstantu C_1 , píšeme

$$u_4 = 0 = C_2 \sin(\alpha L) \underbrace{(C_3 e^{\alpha y} + C_4 e^{-\alpha y})}_{Y(y)}, \quad (76)$$

protože hledáme netriviální řešení, nebudeme uvažovat, že $C_2 = 0$, ale uvážíme $\sin(\alpha L) = 0$, a z toho

$$\sin(\alpha L) = 0 \Leftrightarrow \alpha L = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (77)$$

Z těchto poznatků již můžeme psát funkci $X(x)$ ve tvaru

$$X(x) = (C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (78)$$

Dále dosadíme okrajovou podmínku u_2 do rovnice (74), kde však již nefiguruje funkce $X(x)$ s obecným předpisem, ale s předpisem z rovnice (78). Poté vychází, že

$$\begin{aligned} u_2 = 0 &= \underbrace{(C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}_{X(x)} \left(C_3 e^{\frac{k\pi S}{L}} + C_4 e^{-\frac{k\pi S}{L}} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow C_3 e^{\frac{k\pi S}{L}} + C_4 e^{-\frac{k\pi S}{L}} = 0 \rightarrow C_4 = -e^{\frac{2k\pi S}{L}} C_3. \end{aligned} \quad (79)$$

Když nyní dosadíme výsledek z rovnice (79) do obecného předpisu pro funkci $Y(y)$ a vytkneme konstantu C_3 , dostáváme

$$Y(y) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{2k\pi S}{L} - \frac{k\pi y}{L}} \right) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{k\pi}{L}(2S-y)} \right). \quad (80)$$

Pokud nyní dosadíme výraz (78) a (80) do rovnice (65), vychází

$$u(x, y) = \underbrace{(C_2)_k (C_3)_k}_{C_k} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{k\pi}{L}(2S-y)} \right), \quad (81)$$

kde dvě konstanty přepíšeme na jednu konstantu C_k , a pokud chceme dostat správný výsledek, musí být tento výraz sečten přes všechna k , to můžeme vyjádřit matematicky takto

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{k\pi}{L}(2S-y)} \right). \quad (82)$$

Pokud nyní využijeme poslední okrajové podmínky u_1 a dosadíme ji do rovnice (82). Dostáváme

$$u_1 = \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}} \right), \quad (83)$$

a tento předpis velmi jasně připomíná rovnici (22), tedy Fourierovu sinovou řadu. Dále se budeme snažit vyřešit konstantu C_k pomocí znalostí Fourierových řad. Pokud nyní porovnáme jednotlivé členy rovnice (22) a rovnice (83), dále přidáme poznatek z rovnice (23) a zjišťujeme, že

$$b_k = C_k \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}} \right) \wedge b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{x}{2} \right) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (84)$$

Pokud dále b_k spočteme podle rovnice (23) integrací metodou per partes. Vychází, že

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{x}{2}\right) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = -\frac{L}{k\pi} (-1)^k. \quad (85)$$

Pokud nyní rozdělíme řešení b_k pro k sudá a k lichá, dostáváme

$$b_k = \begin{cases} -\frac{L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (86)$$

Nyní již můžeme spočítat konstantu C_k podle rovnice (84) jako

$$C_k = \frac{b_k}{\left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)}, \quad (87)$$

a pokud dosadíme b_k z rovnice (86), dostáváme

$$C_k = \begin{cases} \frac{-L}{k\pi \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{L}{k\pi \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (88)$$

Tedy výsledek po dosazení konstant C_k z rovnice (88) do rovnice (82) je

$$u^I(x, y) = \begin{cases} -\frac{L}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \text{ sudé})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{k\pi}{L}(2S-y)}\right)}{k \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)} \\ \frac{L}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \text{ liché})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{\frac{k\pi}{L}(2S-y)}\right)}{k \left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)}. \end{cases} \quad (89)$$

3.1.2.2 Část II

Řešení části II je zcela analogické jako řešení části I, až po rovnici (78), která je platná i pro část II. Další postup je již odlišný. Dosadíme okrajovou podmínku u_1 do rovnice (74), kde však již nefiguruje funkce $X(x)$ s obecným předpisem, ale s předpisem z rovnice (78). Poté vychází, že

$$u_1 = 0 = \underbrace{(C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}_{X(x)} (C_3 + C_4) \rightarrow C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = -C_3. \quad (90)$$

Když nyní dosadíme výsledek z rovnice (90) do obecného předpisu pro funkci $Y(y)$ a vytkneme konstantu C_3 , dostáváme

$$Y(y) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi y}{L}} - e^{-\frac{k\pi y}{L}} \right), \quad (91)$$

a dále pro zjednodušení použijeme funkci hyperbolického sinu, dostáváme

$$Y(y) = 2(C_3)_k \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right). \quad (92)$$

Pokud nyní dosadíme výraz (78) a (92) do rovnice (65), vychází

$$u(x, y) = \underbrace{2(C_2)_k (C_3)_k}_{C_k} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right), \quad (93)$$

kde tři konstanty přepíšeme na jednu konstantu C_k a tento výraz sčítáme přes všechna k . Matematicky vyjádřeno jako

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right). \quad (94)$$

Pokud nyní využijeme poslední okrajové podmínky u_2 a dosadíme ji do rovnice (94). Dostáváme

$$u_2 = 1 - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right), \quad (95)$$

a tento výraz se velmi podobá rovnici (22), tedy Fourierově sinové řadě. Dále řešíme konstantu C_k pomocí znalostí Fourierových řad. Pokud nyní porovnáme jednotlivé členy rovnice (22) a (95), dále přidáme poznatek z rovnice (23) a zjišťujeme, že

$$b_k = C_k \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right) \wedge b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (96)$$

Dále b_k spočteme podle rovnice (23) integrací metodou per partes. Vychází

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \\ &= -\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] + \frac{L}{k\pi} \cos k\pi - \frac{L}{k^2\pi^2} \sin k\pi. \end{aligned} \quad (97)$$

Pokud nyní rozdělíme řešení b_k pro k sudá a k lichá, dostáváme

$$b_k = \begin{cases} \frac{L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{4-L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (98)$$

Nyní již můžeme spočítat konstantu C_k podle rovnice (96) jako

$$C_k = \frac{b_k}{\sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}, \quad (99)$$

a pokud dosadíme b_k z rovnice (98), dostáváme

$$C_k = \begin{cases} \frac{L}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{4-L}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (100)$$

Tedy výsledek po dosazení konstant C_k z rovnice (100) do rovnice (94) je

$$u^{II}(x, y) = \begin{cases} \frac{L}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \text{ sudé})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right)}{k \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)} \\ \frac{4-L}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \text{ liché})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{k\pi y}{L}\right)}{k \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}. \end{cases} \quad (101)$$

3.1.2.3 Část III

Pro řešení dalších dvou částí testovacího příkladu je nutno mírně transformovat naší obecně odvozenou rovnici (74), tak aby sinová a kosinová složka měla v argumentu místo souřadnice x , souřadnici y . V rovnici (69) bychom zvolili jako konstantu α^2 místo $-\alpha^2$, poté by výsledkem odvození byla rovnice

$$u(x, y) = [C_1 \cos(\alpha y) + C_2 \sin(\alpha y)][C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}], \quad (102)$$

se kterou budeme dále pracovat a dosazovat do ní příslušné okrajové podmínky. Nejprve dosadíme okrajovou podmínku u_1 a poté můžeme psát

$$u_1 = 0 = C_1 \underbrace{(C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x})}_{X(x)} \rightarrow C_1 = 0. \quad (103)$$

Máme tedy dořešenou konstantu C_1 a budeme pokračovat v dosazování okrajových podmínek. Jako další dosadíme okrajovou podmínku u_2 , a jelikož již známe konstantu C_1 , píšeme

$$u_2 = 0 = C_2 \sin(\alpha S) \underbrace{(C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x})}_{X(x)}, \quad (104)$$

protože hledáme netriviální řešení, nebudeme uvažovat, že $C_2 = 0$, ale uvážíme $\sin(\alpha S) = 0$, a z toho

$$\sin(\alpha S) = 0 \Leftrightarrow \alpha S = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{S}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (105)$$

Z těchto poznatků již můžeme psát funkci $Y(y)$ ve tvaru

$$Y(y) = (C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right). \quad (106)$$

Dále dosadíme okrajovou podmínku u_4 do rovnice (102), kde však již nefiguruje funkce $Y(y)$ s obecným předpisem, ale s předpisem z rovnice (106). Poté vychází, že

$$\begin{aligned} u_4 = 0 &= \underbrace{(C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right)}_{Y(y)} \left(C_3 e^{\frac{k\pi L}{S}} + C_4 e^{-\frac{k\pi L}{S}} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow C_3 e^{\frac{k\pi L}{S}} + C_4 e^{-\frac{k\pi L}{S}} = 0 \rightarrow C_4 = -e^{\frac{2k\pi L}{S}} C_3. \end{aligned} \quad (107)$$

Když nyní dosadíme výsledek z rovnice (107) do obecného předpisu pro funkci $X(x)$ a vytkneme konstantu C_3 , dostáváme

$$X(x) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{2k\pi L}{S} - \frac{k\pi x}{S}} \right) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{k\pi}{S}(2L-x)} \right). \quad (108)$$

Pokud nyní dosadíme vztahy (106) a (108) do rovnice (65), vychází

$$u(x, y) = \underbrace{(C_2)_k (C_3)_k}_{C_k} \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{k\pi}{S}(2L-x)} \right), \quad (109)$$

kde tři konstanty přepíšeme na jednu konstantu C_k a tento výraz sčítáme

přes všechna k . Matematicky vyjádřeno jako

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{k\pi}{S}(2L-x)} \right). \quad (110)$$

Pokud nyní využijeme poslední okrajové podmínky u_3 a dosadíme ji do rovnice (110). Dostáváme

$$u_3 = y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}} \right), \quad (111)$$

a tento výraz se velmi podobá rovnici (22), tedy Fourierově sinové řadě. Dále řešíme konstantu C_k pomocí znalostí Fourierových řad. Pokud nyní porovnáme jednotlivé členy rovnice (22) a rovnice (111), dále přidáme poznatek z rovnice (23) a zjišťujeme, že

$$b_k = C_k \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}} \right) \wedge b_k = \frac{2}{S} \int_0^S y \sin \frac{k\pi y}{S} dy. \quad (112)$$

Dále b_k spočteme podle rovnice (23) integrací metodou per partes. Vychází

$$b_k = \frac{2}{S} \int_0^S y \sin \frac{k\pi y}{S} dy = -\frac{2S}{k\pi} (-1)^k. \quad (113)$$

Pokud nyní rozdělíme řešení b_k pro k sudá a k lichá, dostáváme

$$b_k = \begin{cases} -\frac{L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{L}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (114)$$

Nyní již můžeme spočítat konstantu C_k podle rovnice (112) jako

$$C_k = \frac{b_k}{\left(1 - e^{\frac{2k\pi S}{L}}\right)}, \quad (115)$$

a pokud dosadíme b_k z rovnice (114), dostáváme

$$C_k = \begin{cases} \frac{-2S}{k\pi \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}}\right)}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{2S}{k\pi \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}}\right)}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (116)$$

Tedy výsledek po dosazení konstant C_k z rovnice (116) do rovnice (110) je

$$u^{III}(x, y) = \begin{cases} -\frac{2S}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \text{ sudé})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{k\pi}{S}(2L-x)}\right)}{k \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}}\right)} \\ \frac{2S}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \text{ liché})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{\frac{k\pi}{S}(2L-x)}\right)}{k \left(1 - e^{\frac{2k\pi L}{S}}\right)}. \end{cases} \quad (117)$$

3.1.2.4 Část IV

Řešení části IV je zcela analogické jako řešení části III, až po rovnici (106), která je platná i pro část IV. Další postup je již odlišný. Dosadíme okrajovou podmínku u_3 do rovnice (102), kde však již nefiguruje funkce $Y(y)$ s obecným předpisem, ale s předpisem z rovnice (106). Poté vychází, že

$$u_3 = 0 = \underbrace{(C_2)_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right)}_{Y(y)} (C_3 + C_4) \rightarrow C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = -C_3. \quad (118)$$

Když nyní dosadíme výsledek z rovnice (118) do obecného předpisu pro funkci $X(x)$ a vytkneme konstantu C_3 , dostáváme

$$X(x) = (C_3)_k \left(e^{\frac{k\pi x}{S}} - e^{-\frac{k\pi x}{S}} \right), \quad (119)$$

a pokud nyní ke zjednodušení vztahu v závorce použijeme funkci hyperbolického sinu dostáváme předpis pro $X(x)$ ve tvaru

$$X(x) = 2(C_3)_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{S}\right). \quad (120)$$

Pokud tedy nyní dosadíme jak rovnici (106), tak rovnici (120) do rovnice (65), vidíme že vychází

$$u(x, y) = \frac{2(C_2)_k(C_3)_k}{C_k} \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{S}\right), \quad (121)$$

kde tři konstanty přepíšeme na jednu konstantu C_k , a pokud chceme dostat správný výsledek, musí být tento výraz sečten přes všechna k , to můžeme vyjádřit matematicky takto

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{S}\right). \quad (122)$$

Pokud nyní využijeme poslední okrajové podmínky u_4 a dosadíme ji do rovnice (122). Dostáváme

$$u_3 = 1 - y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right), \quad (123)$$

a tento výraz se velmi podobá rovnici (22), tedy Fourierově sinové řadě. Dále řešíme konstantu C_k pomocí znalostí Fourierových řad. Pokud nyní porovnáme jednotlivé členy rovnice (22) a rovnice (123), dále přidáme poznatek z rovnice (23) a zjišťujeme, že

$$b_k = C_k \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right) \wedge b_k = \frac{2}{S} \int_0^S (1-y) \sin \frac{k\pi y}{S} dy. \quad (124)$$

Dále b_k spočteme podle rovnice (23) integrací metodou per partes. Vychází

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{S} \int_0^S (1-y) \sin \frac{k\pi y}{S} dy = \\ &= -\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] + \frac{2S}{k\pi} (-1)^k - \frac{2S}{k^2\pi^2} \sin k\pi. \end{aligned} \quad (125)$$

Pokud nyní rozdělíme řešení b_k pro k sudá a k lichá, dostáváme

$$b_k = \begin{cases} \frac{2S}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{4-2S}{k\pi}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (126)$$

Nyní již můžeme spočítat konstantu C_k podle rovnice (124) jako

$$C_k = \frac{b_k}{\sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right)}, \quad (127)$$

a pokud dosadíme b_k z rovnice (126), dostáváme

$$C_k = \begin{cases} \frac{2S}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right)}, & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{4-2S}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right)}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \quad (128)$$

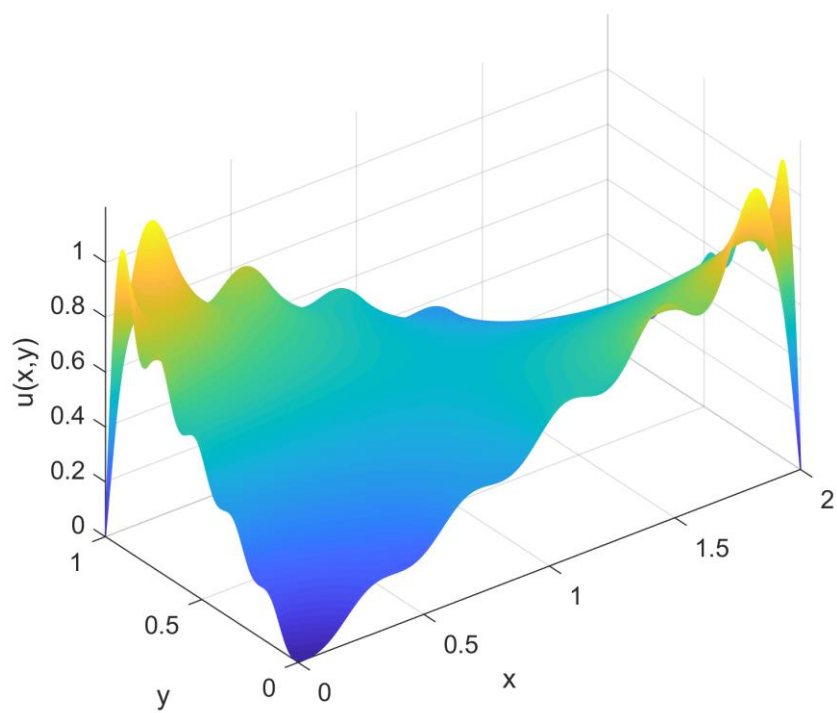
Tedy výsledek po dosazení konstant C_k z rovnice (128) do rovnice (122) je

$$u^{IV}(x, y) = \begin{cases} \frac{2S}{\pi} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \text{ sudé})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{S}\right)}{k \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right)} \\ \frac{4-2S}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \text{ liché})}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi y}{S}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{S}\right)}{k \sinh\left(\frac{k\pi L}{S}\right)}. \end{cases} \quad (129)$$

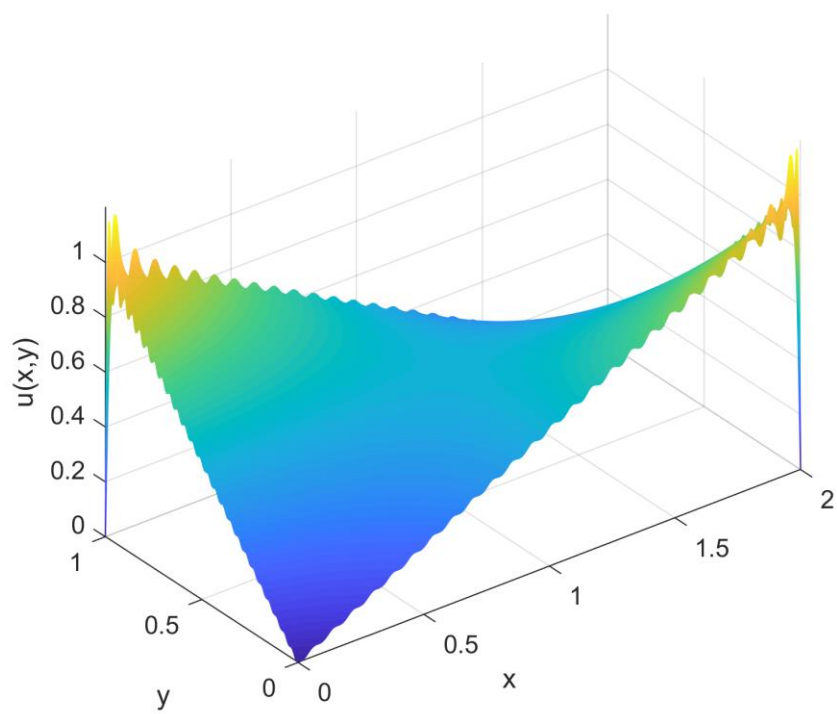
Výsledek testovací příkladu dostaneme, pokud nyní částečné výsledky z rovnic (89), (101), (117) a (129) sečteme. Tedy

$$u(x, y) = u^I(x, y) + u^{II}(x, y) + u^{III}(x, y) + u^{IV}(x, y), \quad (130)$$

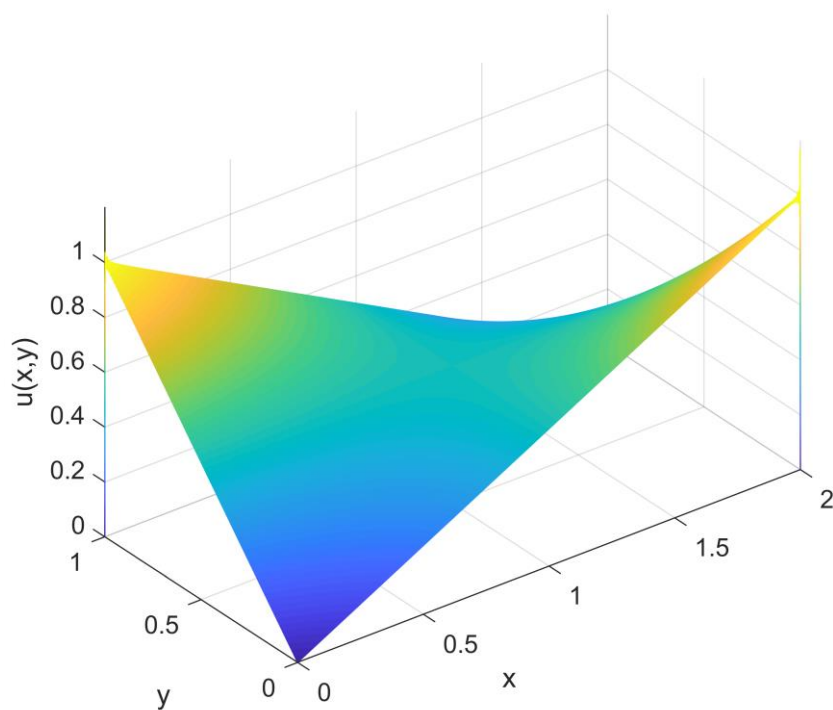
a to je již vyjádřený předpis funkce $u(x, y)$, která vyhovuje zadané Laplaceově rovnici a daným okrajovým podmínkám. Posledním krokem je již jen programování výsledku v jazyce C++, viz kapitola 10.1, a zobrazení výsledných dat v prostředí Matlab. Na obrázcích 7 a 8 je již zobrazen výsledek pro relativně malý počet sečtených členů Fourierovy řady. Výsledky s takto malým počtem sečtených členů nemají žádnou vypovídající hodnotu ohledně správného výsledku $u(x, y)$, avšak je na nich výborně vidět sčítání členů Fourierovy řady a konvergence ke správnému výsledku. Pokud se chceme s dostatečnou přesností přiblížit přesnému řešení $u(x, y)$, budeme se snažit o sečtení co nejvíce členů řady. V případě programování v jazyce C++ a použití datového typu long double je maximální počet členů Fourierovy řady, který se vzhledem k přesnosti výpočtu dá sečíst, 1800. Řešení je zobrazeno na obrázku 9 a 10.



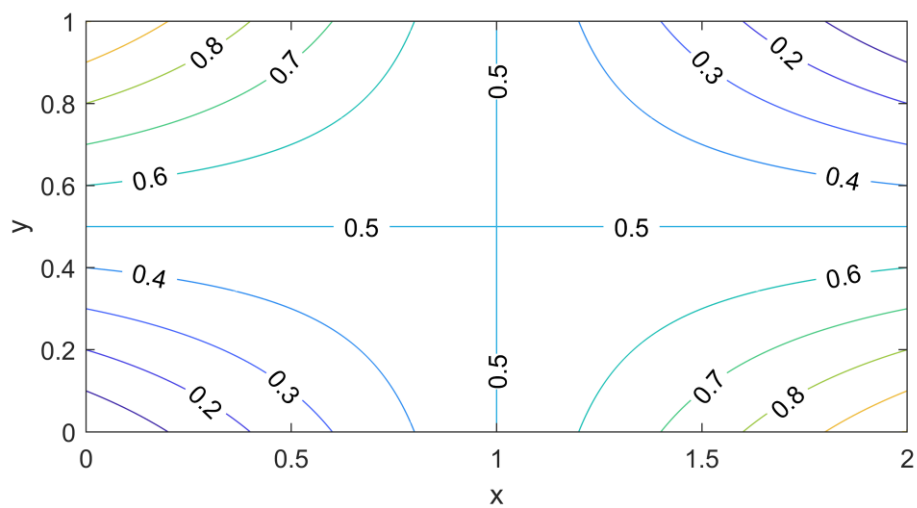
Obrázek 7 - Výsledek pro $k = 10$ LR



Obrázek 8 - Výsledek pro $k = 50$ LR



Obrázek 9 - Výsledek pro $k = 1800$ LR

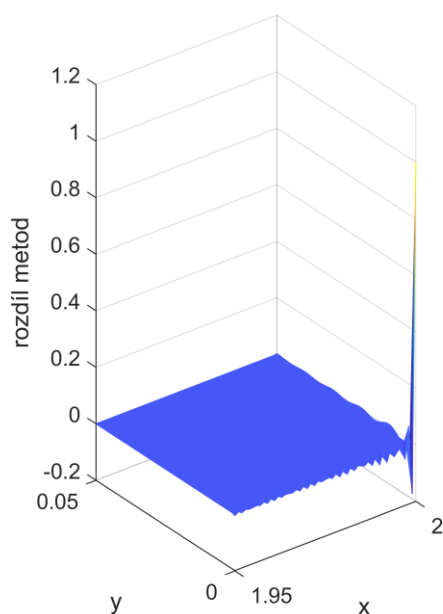


Obrázek 10 - Isokřivky pro $k = 1800$ LR

3.1.3 Porovnání s numerickou metodou

Pokud nyní chceme porovnat výsledky získané rovnicí (130) s výsledky získané jinou metodou, sáhneme po aparátu numerické matematiky popsaného v kapitole 2.3.1, tedy po metodě sítí. Dále je vzniklá soustava lineárních rovnic řešena superrelaxační metodou pro urychlení konvergence, tato metoda je popsána v kapitole 2.3.2.3. Takto se Laplaceova rovnice konvenčně řeší, a proto je přirozené tyto metody porovnávat. Kód pro řešení Laplaceovy rovnice numerickou metodou byl opět napsán v jazyce C++ a je přiložen v kapitole 10.2. Výsledek je zobrazen v prostředí Matlab na obrázku 13. Pokud nyní disponujeme dvěma sadami dat, jednou spočítanou pomocí Fourierovy metody a druhou počítanou numerickou metodou, odečteme funkční hodnotu funkce $u(x, y)$ získanou Fourierovou metodou od funkční hodnoty získané numerickou metodou v každém diskrétním bodě. Tímto procesem získáme pole rozdílů, jinak řečeno přehled o tom, kde a o kolik se metody liší. Graficky bylo toto pole zpracováno v prostředí Matlab a je zobrazeno na obrázku 12. Pokud se nyní na toto srovnání pečlivě podíváme, můžeme prohlásit, že metody se ve velké míře shodují a dávají stejné výsledky, tudíž se potvrdila očekávání. Odchyly obou metod v oblasti se pohybují v řádech o mnoho nižších, než by byly řády vyšetřovaných veličin. Poněkud jiná situace je na hranicích oblasti, kde Fourierova metoda tvoří okrajové podmínky součtem harmonických funkcí. Pokud totiž okrajová podmínka není spojitá, ukazuje se, že Fourierova metoda si s tím neumí příliš dobře poradit, a tedy bude v této malé části oblasti nepřesná. Jak je patrné, pokud nesečteme nekonečně mnoho členů Fourierovy řady, toto zakmitání v rozích oblasti, kde okrajové podmínky nejsou spojité, vždy bude. Na druhou stranu, tato chyba je koncentrována v minimálním množství bodů v rozích oblasti, kde funkční hodnoty funkce $u(x, y)$ známe z okrajových podmínek, tudíž je tato chyba malého významu, viz obrázek 11. Pokud se nyní podíváme na výsledky z hlediska rychlosti výpočtu, zjišťujeme několik zásadních věcí. Vycházeli jsme z předpokladu, že Fourierova metoda by měla být o dost rychlejší, jelikož v tomto případě pouze dosazujeme do vzorce vyjadřujícího řešení, tento předpoklad se však nakonec potvrdil jen v omezeném rozsahu a tyto skutečnosti jsou shrnuty v tabulce 1. Například výpočet dat pomocí Fourierovy metody při tisícínovém dělení oblasti a při sečtení největšího možného počtu členů řady trval 3519 sekund, oproti tomu numerické metodě to trvalo pouze 379 sekund. Z toho vyplývá, že v tomto případě je Fourierova metoda

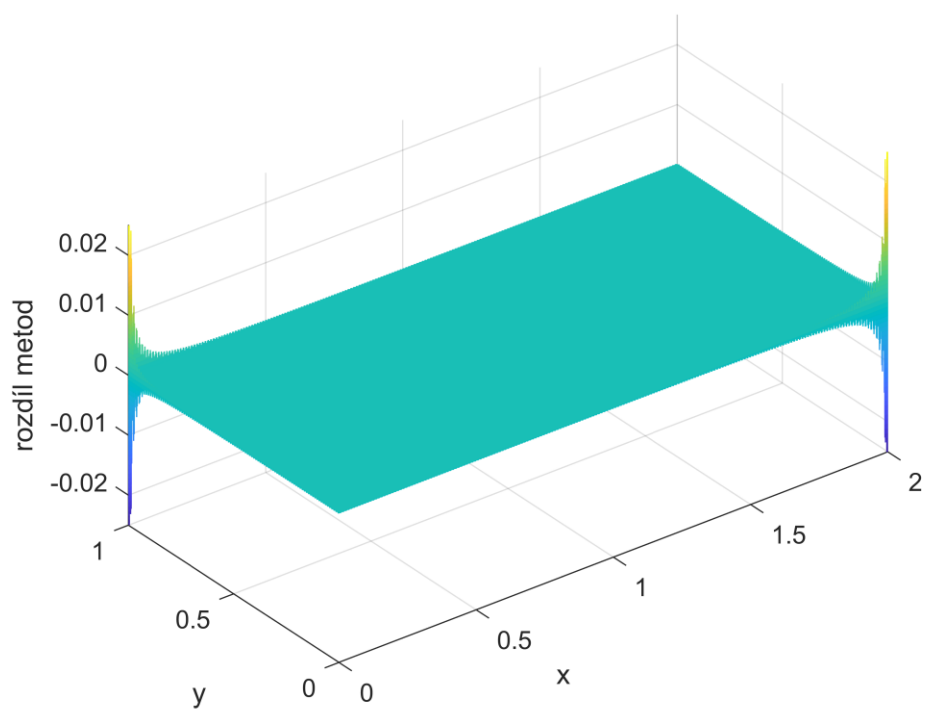
téměř desetkrát pomalejší než metoda numerická, a tedy i horším způsobem výpočtu. Pokud ovšem budeme sčítat méně členů řady při použití Fourierovy metody, začínají být časy mnohem příznivější. Při sečtení sta členů řady je výpočetní čas pouze 216 sekund a data uvnitř oblasti jsou velmi přesná, pouze hranice oblasti a malá oblast k hranici přiléhající kmitá a je mírně zkreslená. Pokud tedy zanedbáme chyby na hranici oblasti a malé pruhy oblasti hranici přiléhající, které by se daly aproximovat z okrajových podmínek, vychází poté hodnoty největší chyby Fourierovy metody pro jednotlivé počty sečtených členů řady ve srovnání s metodou numerickou dle tabulky 1. Z této tabulky plyne skutečnost, že jsme schopni Laplaceovu rovnici řešit s dobrou přesností pomocí Fourierovy metody několikánásobně rychleji, než to zvládne metoda numerická.



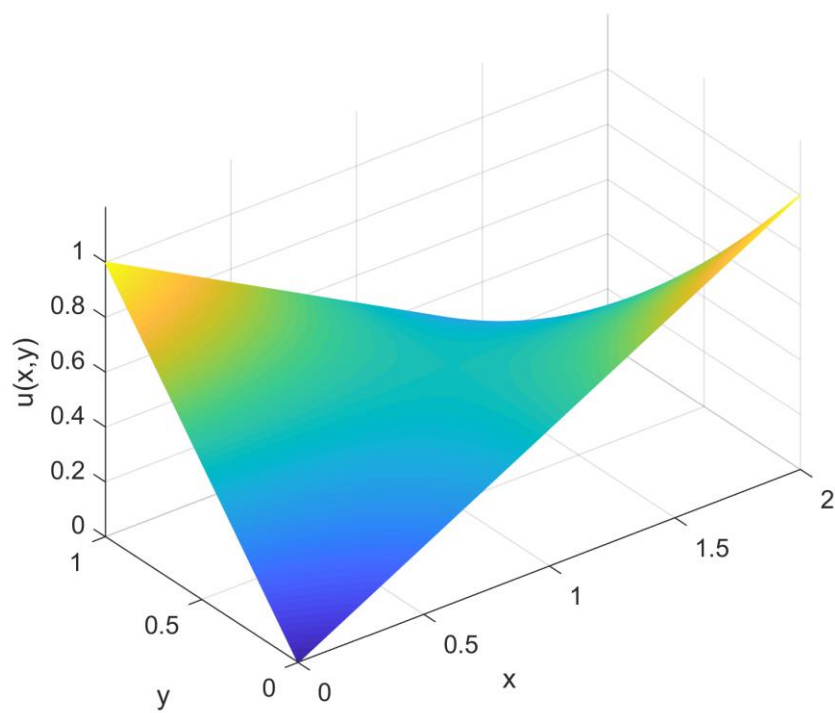
Obrázek 11 - Chyba v rohu oblasti LR

Tabulka 1 - Srovnání doby výpočtu a chyby vůči numerické metodě LR v závislosti na počtu sečtených členů řady

Počet členů řady	10	25	50	100	500	1800	Numerická metoda
Doba výpočtu [s]	29	63	113	216	1031	3519	379
Chyba $[10^{-3}]$	177,600	11,200	1,300	0,013	0	0	



Obrázek 12 - Rozdíl Fourierovy a numerické metody pro LR



Obrázek 13 - Výsledek numerické metody pro LR

3.2 Řešení Poissonovy rovnice

3.2.1 Odvození

Mějme Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici zadanou na oblasti Ω viz obrázek 5. Tato rovnice má předpis

$$\Delta u(x, y) = F(x, y). \quad (131)$$

Při odvození Poissonovy rovnice zachováme značení z kapitoly 3.1 a budeme postupovat s přihlédnutím na výsledky získané odvozením Laplaceovy rovnice, tedy homogenní Poissonovy rovnice. V kapitole 3.1.2.1 se ukázalo, že pokud dosadíme do obecného řešení z rovnice (74) dvě homogenní okrajové podmínky, u_3 a u_4 , dostáváme řešení ve tvaru součinu funkce závislé na y a sinu s proměnnou x v argumentu, v obou těchto funkcích také vystupuje k jako sčítací index. Matematicky tedy vyjádříme předpokládaný tvar řešení jako sinovou Fourierovu řadu, takto

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (132)$$

za předpokladu okrajových podmínek

$$\begin{aligned} x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = f(x) \\ u_2 = g(x) \end{cases} \\ y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dalším krokem je vyjádření pravé strany rovnice (131) ve stejném tvaru jako předpokládané řešení, tedy

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (133)$$

kde $F_k(y)$ hledáme jako koeficient b_k z rovnic (22) a (23). Pokud nyní dosadíme předpokládaný tvar řešení z rovnice (132) a pravou stranu upravenou podle rovnice (133) do předpisu řešené Poissonovy rovnice (131), dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(Y_k(y) \frac{\partial^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}{\partial x^2} + \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \frac{\partial^2 Y_k(y)}{\partial y^2} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (134)$$

Po derivování a převedení všech členů na levou stranu rovnice vychází

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Y_k(y) - F_k(y) \right) \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}_{\neq 0} = 0. \quad (135)$$

Aby byla tedy rovnice splněna, položíme závorku závislou na y rovnu nule a budeme řešit následující obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Y_k(y) = F_k(y). \quad (136)$$

Vyřešíme nejprve tedy homogenní rovnici přes rovnici charakteristickou

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Y_k(y) = 0 \rightarrow \lambda^2 - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \frac{k\pi}{L}, \quad (137)$$

a poté můžeme psát homogenní řešení jako

$$Y_k^h(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}}. \quad (138)$$

Jelikož funkci $F_k(y)$ uvažujeme obecně, přičteme k homogennímu řešení pouze obecně partikulární řešení $Y_k^p(y)$, které bychom vyřešili například

metodou odhadu nebo metodou variace konstant, tedy celkové řešení rovnice (136) vypadá následovně

$$Y_k(y) = Y_k^h(y) + Y_k^p(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}} + Y_k^p(y), \quad (139)$$

a pokud nyní dosadíme $Y_k(y)$ z rovnice (139) do předpokládaného tvaru řešení z rovnice (132), dostáváme

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}} + Y_k^p(y) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (140)$$

což je již předpis naší hledané funkce $u(x, y)$, kde stačí již pouze pomocí dvou okrajových podmínek u_1 a u_2 dořešit konstanty A_k a B_k . Pokud tedy nyní dosadíme do rovnice (140) okrajovou podmínku u_1 , dostáváme

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k + B_k + Y_k^p(0) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (141)$$

a pokud budeme hledat koeficient b_k z rovnic (22) a (23) pro tuto řadu, můžeme psát, že

$$b_k = A_k + B_k + Y_k^p(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \quad (142)$$

Nyní dosadíme do přepisu funkce z rovnice (140) okrajovou podmínku u_2 , tedy píšeme

$$u(x, S) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi S}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi S}{L}} + Y_k^p(S) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (143)$$

a analogickým postupem jako v rovnici (142) dostáváme druhou z potřebných dvou rovnic pro řešení konstant A_k a B_k , tedy

$$b_k = A_k e^{\frac{k\pi S}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi S}{L}} + Y_k^p(S) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \quad (144)$$

Nyní již disponujeme soustavou dvou algebraických rovnic pro dvě neznámé A_k a B_k . Tuto soustavu můžeme maticově psát jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{k\pi S}{L}} & e^{-\frac{k\pi S}{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx - Y_k^p(0) \\ \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx - Y_k^p(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (145)$$

a následně ji řešit pomocí Cramerova pravidla, kde vektor pravé strany budeme psát pouze ve zjednodušeném tvaru, tedy řešíme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{k\pi S}{L}} & e^{-\frac{k\pi S}{L}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{k\pi S}{L}} - e^{\frac{k\pi S}{L}} = -2 \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right), \quad (146)$$

poté již můžeme psát výsledné konstanty ve tvaru

$$A_k = \frac{1}{-2 \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)} \begin{vmatrix} I_1 & 1 \\ I_2 & e^{-\frac{k\pi S}{L}} \end{vmatrix} = \frac{I_1 e^{-\frac{k\pi S}{L}} - I_2}{-2 \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}, \quad (147)$$

$$B_k = \frac{1}{-2 \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)} \begin{vmatrix} 1 & I_1 \\ e^{\frac{k\pi S}{L}} & I_2 \end{vmatrix} = \frac{I_2 - I_1 e^{\frac{k\pi S}{L}}}{-2 \sinh\left(\frac{k\pi S}{L}\right)}. \quad (148)$$

Po vyřešení konstant A_k a B_k již získáváme kompletní předpis funkce $u(x, y)$, která je řešením dané Poissonovy rovnice. Postup odvození pro případ, kdy okrajové podmínky u_1 a u_2 budou nulové a naopak podmínky u_3 a u_4 budou nehomogenní je analogický.

3.2.2 Testovací příklad

Mějme Poissonovu rovnici zadanou předpisem z rovnice (131) a oblast řešení Ω s okrajovými podmínkami dle obrázku 5. Nyní již definujeme funkci pravé strany jako

$$F(x, y) = 10xy, \quad (149)$$

a okrajové podmínky následovně

$$\begin{aligned} x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = x/2 \\ u_2 = 1 - x/2 \end{cases}, L = 2, \\ y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}, S = 1. \end{aligned}$$

Prvním krokem, který musíme učinit při konkrétním řešení, je vyřešit koeficient $F_k(y)$ z rovnice (133) analogicky jako koeficient b_k z rovnic (22) a (23), tedy řešíme integrací metodou per partes

$$F_k(y) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -20y \frac{L}{k\pi} (-1)^k. \quad (150)$$

Dále, když známe koeficient $F_k(y)$, můžeme již řešit rovnici (136), a jelikož homogenní řešení známe z rovnice (138), stačí nám vyřešit partikulární řešení například metodou odhadu. Tedy odhadneme řešení ve tvaru

$$Y_k^p(y) = K_1 y + K_2, \quad Y_k^{p'}(y) = K_1, \quad Y_k^{p''}(y) = 0, \quad (151)$$

které dosadíme do rovnice (136) a vychází, že

$$-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (K_1 y + K_2) = -20y \frac{L}{k\pi} (-1)^k \rightarrow K_2 = 0, \quad (152)$$

porovnáním koeficientů u lineárních členů získáme konstantu K_1 jako

$$K_1 = \frac{20L^3}{(k\pi)^3}(-1)^k, \quad (153)$$

a tedy píšeme výsledné partikulární řešení

$$Y_k^p(y) = \frac{20L^3}{(k\pi)^3}(-1)^k y. \quad (154)$$

Celkové řešení poté získáme jako součet homogenního řešení a partikulárního řešení, jinak řečeno součet výsledků z rovnice (138) a (154). Matematicky zapsáno jako

$$Y_k(y) = Y_k^h(y) + Y_k^p(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}} + \frac{20L^3}{(k\pi)^3}(-1)^k y. \quad (155)$$

Pokud nyní dosadíme výsledek z rovnice (155) do rovnice předpokládaného tvaru řešení (132), dostáváme

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}} + \frac{20L^3}{(k\pi)^3}(-1)^k y \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (156)$$

Dále již stačí pouze dořešit konstanty A_k a B_k za použití okrajových podmínek u_1 a u_2 . Po dosazení u_1 do rovnice (156), píšeme

$$u(x, 0) = \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (157)$$

a pokud budeme hledat koeficient b_k z rovnic (22) a (23) pro tuto řadu, můžeme psát, že

$$b_k = A_k + B_k = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{x}{2} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{k\pi}(-1)^k. \quad (158)$$

Dále dosadíme do rovnice (156) okrajovou podmínku u_2 a dostáváme

$$u(x, S) = 1 - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi S}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi S}{L}} + \frac{20L^3}{(k\pi)^3} (-1)^k S \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (159)$$

jelikož potřebujeme dořešit druhou algebraickou rovnicí pro získání konstant, opět budeme hledat koeficient b_k z rovnic (22) a (23) pro tuto řadu, tedy můžeme psát, že

$$b_k = A_k e^{\frac{k\pi S}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi S}{L}} + \frac{20L^3}{(k\pi)^3} (-1)^k S = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] + \frac{L}{k\pi} (-1)^k. \quad (160)$$

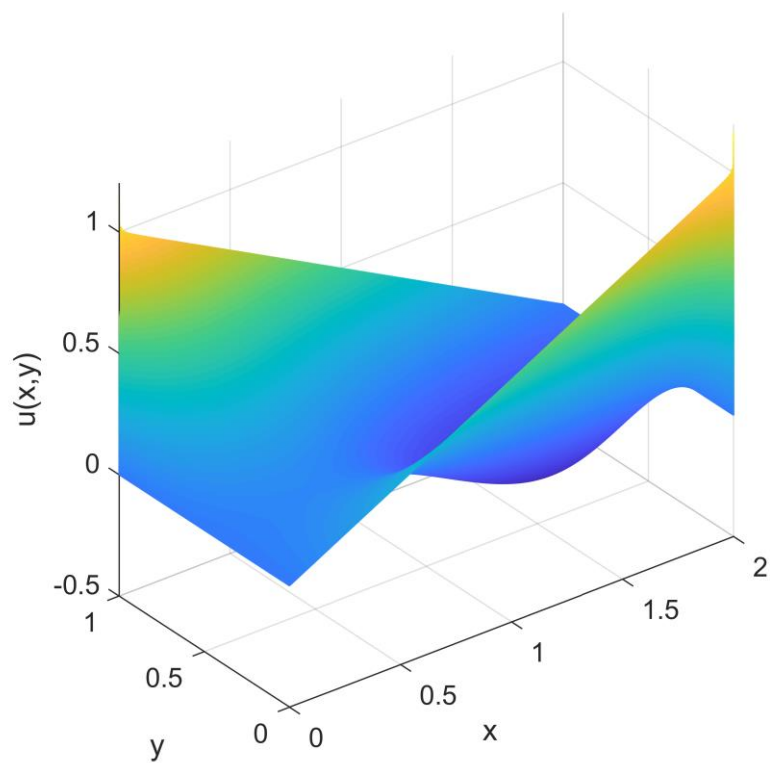
Z rovnic (158) a (160) můžeme nyní vytvořit soustavu lineárních algebraických rovnic o dvou neznámých A_k a B_k . Maticově psáno jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{k\pi S}{L}} & e^{-\frac{k\pi S}{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{k\pi} (-1)^k \\ \left(\frac{(L-2)(k\pi)^2 - 20L^3 S}{(k\pi)^3} \right) (-1)^k + \frac{2}{k\pi} \end{pmatrix}. \quad (161)$$

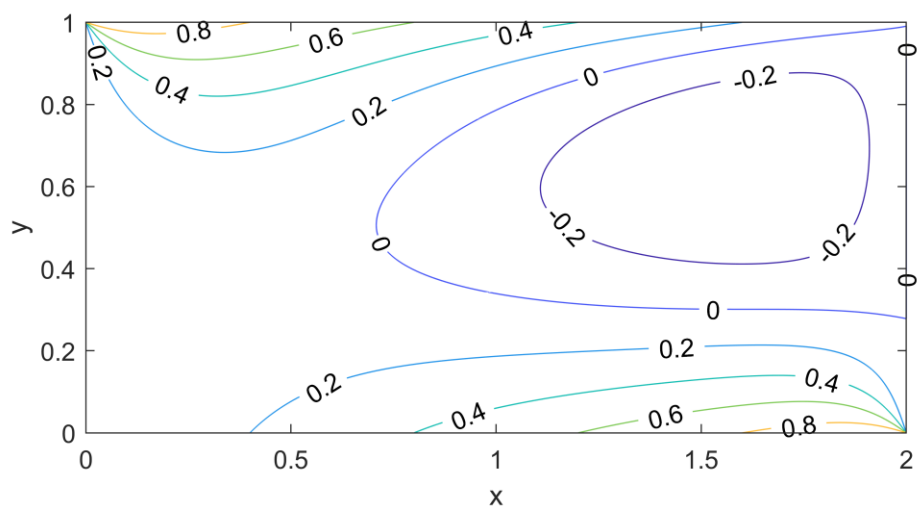
Nyní přeznačíme vektor pravé strany dle rovnice (145), dostaneme

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{k\pi} (-1)^k \\ \left(\frac{(L-2)(k\pi)^2 - 20L^3 S}{(k\pi)^3} \right) (-1)^k + \frac{2}{k\pi} \end{pmatrix}, \quad (162)$$

a pokud nyní dosadíme jednotlivé složky vektoru pravé strany do vztahů (147) a (148) pro výpočet konstant A_k a B_k , a tyto konstanty dosadíme do rovnice (156), dostáváme již výsledný předpis funkce $u(x, y)$, která vyhovuje zadané Poissonově rovnici a daným okrajovým podmínkám. Posledním krokem je již jen programování výsledku v jazyce C++, viz kapitola 10.1, a zobrazení výsledných dat v prostředí Matlab, které je na obrázcích 14 a 15.



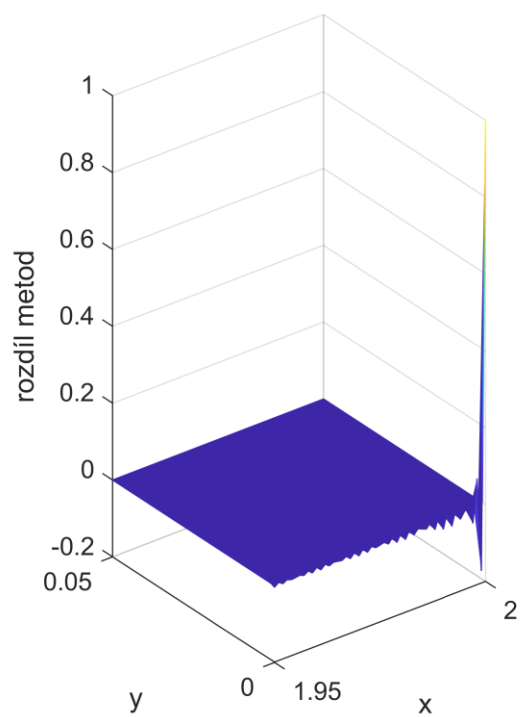
Obrázek 14 - Výsledek pro $k = 1800$ PR



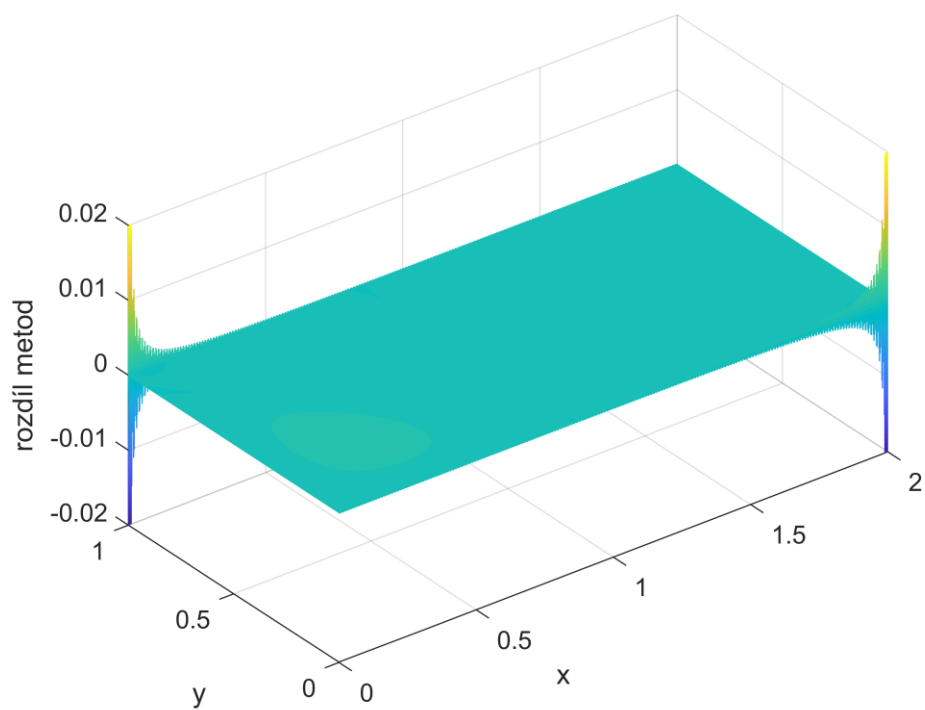
Obrázek 15 - Isokřivky pro $k = 1800$ PR

3.2.3 Porovnání s numerickou metodou

Pokud nyní chceme porovnat výsledky získané Fourierovou metodou s výsledky získané jinou metodou, budeme muset stejně jako v kapitole 3.1.3 využít numerické matematiky popsané v kapitole 2.3.1, tedy po metodě sítí. Dále bude vzniklá soustava lineárních rovnic řešena superrelaxační metodou pro urychlení konvergence, tato metoda je popsána v kapitole 2.3.2.3. Kód pro řešení Poissonovy rovnice numerickou metodou byl opět napsán v jazyce C++ a je přiložen v kapitole 10.2. Výsledek je zobrazen v prostředí Matlab na obrázku 18. Pokud nyní disponujeme dvěma sadami dat, provedeme rozdíl těchto dat v každém diskrétním bodě. Tímto procesem získáme pole rozdílů. Graficky bylo toto pole zpracováno v prostředí Matlab a je zobrazeno na obrázku 17. Pokud se nyní na toto srovnání podíváme, můžeme prohlásit, že metody se výsledkově shodují. Odchytky obou metod v oblasti se pohybují v řádech o mnoho nižších, než by byly řády vyšetřovaných veličin. Ovšem stejně jako v případě řešení Laplaceovy rovnice si Fourierova metoda neumí příliš dobře poradit s nespojitou okrajovou podmínkou. Tato chyba však nemá velkého významu a funkční hodnoty v těchto bodech bychom mohli aproximovat z okrajových podmínek, tato chyba je zobrazena na obrázku 16. Pokud se nyní podíváme na výsledky z hlediska rychlosti výpočtu zjišťujeme několik zásadních věcí, které vyplývají z tabulky 2. Například výpočet dat pomocí Fourierovy metody při tisícínovém dělení oblasti a při sečtení největšího možného počtu členů řady trval 1817 sekund, oproti tomu numerické metodě to trvalo pouze 200 sekund. Takováto aplikace Fourierovy metody pozbývá významu, jelikož je v tomto nastavení ve všech parametrech horší. Ovšem dále z tabulky 2 vyplývá skutečnost, že stejně jako v případě výpočtu Laplaceovy rovnice můžeme snížit počet sečtených členů řady, a tím i značně snížit výpočetní čas při nevýrazném zvětšení chyby za předpokladu aproximace oblasti hranice z okrajových podmínek. Například pro sto sečtených členů Fourierovy řady je výpočetní čas 112 sekund, což téměř dvojnásobná úspora času oproti numerické metodě. Snížený počet sečtených členů nakonec ovlivní pouze data v blízkosti hranice oblasti, data uvnitř oblasti zůstávají téměř nezměněna.



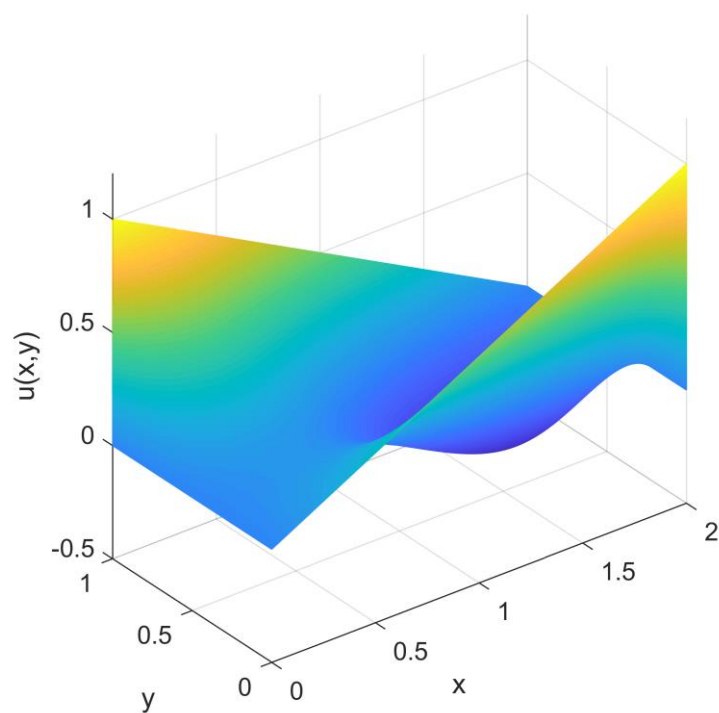
Obrázek 16 - Chyba v rohu oblasti PR



Obrázek 17 - Rozdíl Fourierovy a numerické metody pro PR

Tabulka 2 - Srovnání doby výpočtu a chyby vůči numerické metodě PR v závislosti na počtu sečtených členů řady

Počet členů řady	10	25	50	100	500	1800	Numerická metoda
Doba výpočtu [s]	20	37	61	112	518	1817	200
Chyba $[10^{-3}]$	148,100	11,300	1,300	1,100	1,051	1,051	



Obrázek 18 - Výsledek numerické metody pro PR

4 Reálné aplikace Laplaceovy a Poissonovy rovnice

Laplaceovy a Poissonovy rovnice se často vyskytují při matematickém modelování fyzikálních problémů. Poissonova rovnice řeší například stacionární rozložení teploty v tělese s vnitřním zdrojem tepla a dále potenciály gravitačního a elektrostatického pole [2]. Poissonova rovnice může také popisovat deformaci tenké pružné membrány při zatížení [8]. Laplaceova rovnice vzniká při popisu rozložení teploty v tělese bez vnitřního zdroje tepla nebo při řešení potenciálu vektorového pole nevířivého nestlačitelného proudění [2]. Pro ukázkou bylo vybráno rozložení teploty na tenké desce a deformace tenké pružné membrány.

4.1 Rozložení teploty na tenké desce

Mějme tenkou desku s rozměry 1 x 1 x 0,01 metru a izolovanou přední i zadní stranou o rozměrech 1 x 1 metr. Tuto desku vložíme do ledové lázně a k jedné straně o rozměrech 1 x 0,01 metru přiložíme rozlehlé těleso o teplotě 25 stupňů Celsia. Dále necháme celou soustavu ustálit.

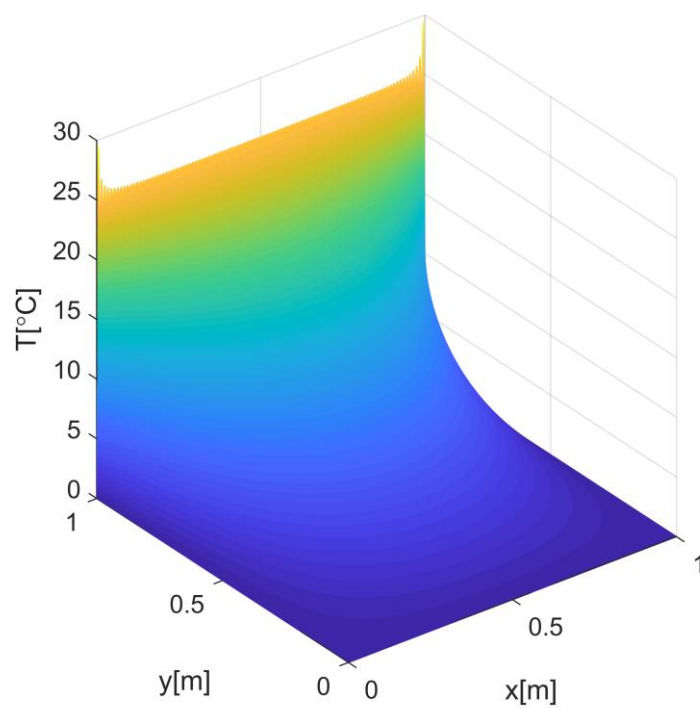
Laplaceova rovnice popisující tento problém vypadá následovně

$$\Delta T(x, y) = 0, \quad (163)$$

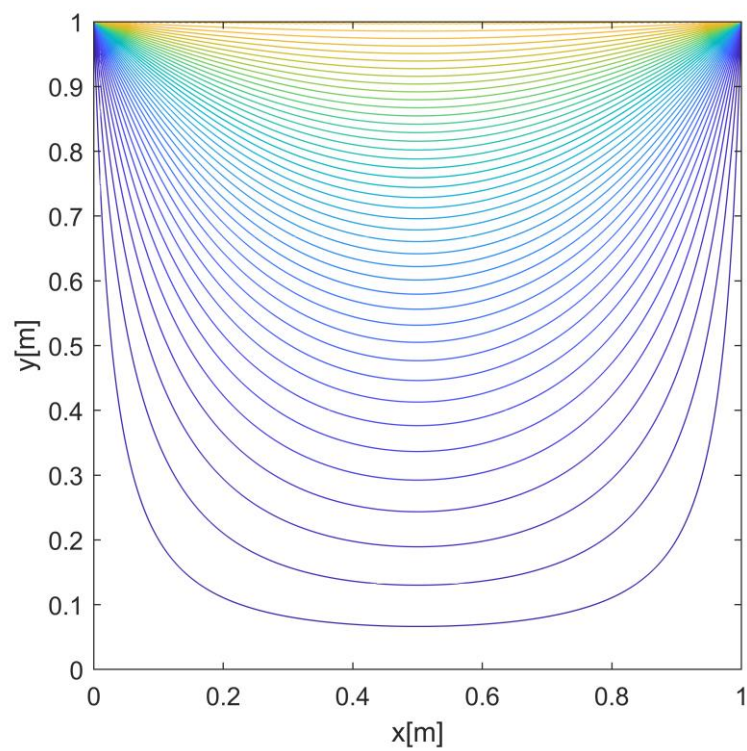
a okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 25 \end{cases}, L = 1, \\ y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}, S = 1. \end{aligned}$$

K řešení byla využita Fourierova metoda při tisícínovém dělení oblasti a sečtení 200 členů Fourierovy řady. Výsledek zobrazen v prostředí Matlab na obrázcích 19 a 20.



Obrázek 19 - Rozložení teploty



Obrázek 20 - Isokřivky rozložení teploty

4.2 Deformace tenké pružné membrány

Mějme tenkou pružnou membránu přetaženou přes tenkostěnnou trubku čtvercového průřezu o rozměrech 1 x 1 metr. Membrána je napjata na průřezu 1 x 1 metr předpětím $S = 10 \text{ kN/m}$ a uvnitř trubky je přetlak $p = 0,01 \text{ MPa}$. Deformaci membrány řešíme za předpokladu, že předpětí je natolik velké, že zůstává při deformaci konstantní a přídatná napětí od deformací v rovině xy jsou zanedbatelná.

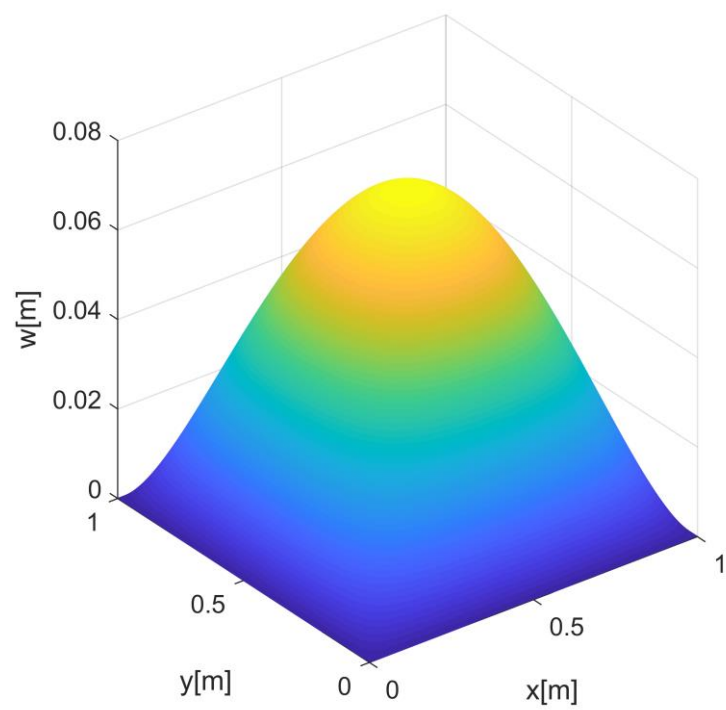
Poissonova rovnice popisující tento problém vypadá následovně

$$\Delta w(x, y) = -\frac{p}{S}. \quad (164)$$

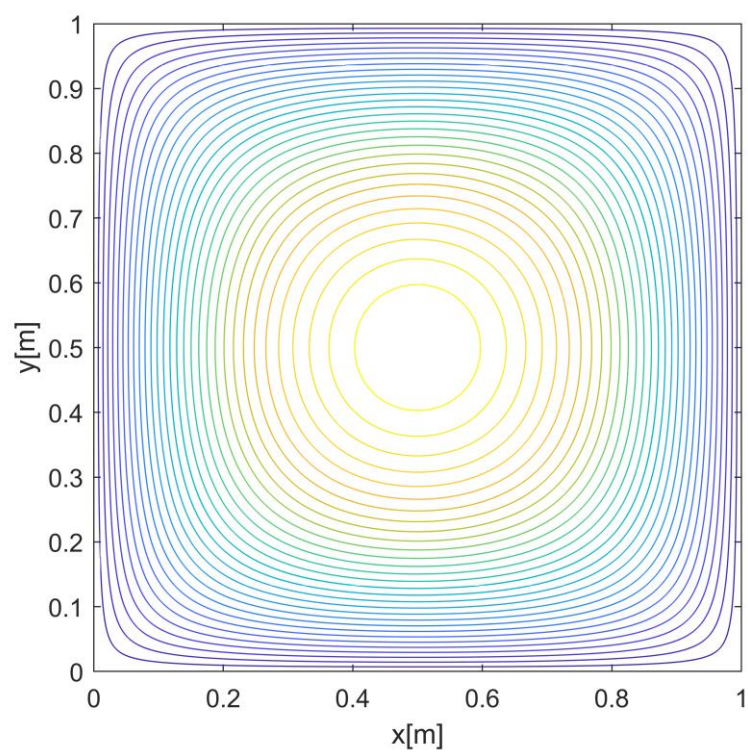
Okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} x \in \langle 0, L \rangle \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}, L = 1, \\ y \in \langle 0, S \rangle \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}, S = 1. \end{aligned}$$

K řešení byla využita Fourierova metoda při tisícínovém dělení oblasti a sečtení 200 členů Fourierovy řady. Výsledný průhyb tenké pružné membrány napjaté na trubce čtvercového průřezu je zobrazen v prostředí Matlab na obrázcích 21 a 22.



Obrázek 21 - Průhyb membrány



Obrázek 22 - Isokřivky průhybu membrány

5 Závěr

V této práci byla řešena Laplaceova rovnice a její nehomogenní ekvivalent, rovnice Poissonova, pomocí Fourierovy metody. Cílem této práce bylo ukázat řešení těchto rovnic za pomoci Fourierovy metody a rozhodnout o jejich správnosti za pomoci numerické metody, přesněji, za použití metody konečných diferencí. Za další cíl této práce se také dala považovat snaha o nalezení výpočetně méně náročného řešení, než je metoda numerická.

V první části práce jsou popsány oddíly matematiky potřebnými pro pochopení řešení Laplaceovy a Poissonovy rovnice Fourierovou metodou, a následně také pro pochopení numerických schémat. Je zde tedy přiblížena problematika parciálních diferenciálních rovnic, dále jsou zde popsány a vysvětleny Fourierovy řady a v poslední řadě jsou zde zmíněny numerické metody používané pro řešení Laplaceovy a Poissonovy rovnice.

V druhé části bylo již odvozeno řešení Laplaceovy rovnice za pomoci Fourierovy metody nejdříve obecně, a poté již byla tato metoda aplikována na konkrétní příklad. Správnost těchto úvah byla nakonec ověřena tak, že řešení numerickou metodou dávalo v zásadě stejné výsledky jako řešení metodou Fourierovou.

V třetí části bylo čerpáno z poznatků získaných odvozením řešení Laplaceovy rovnice a bylo odvozeno řešení Poissonovy rovnice Fourierovou metodou nejdříve obecně, a poté již byla tato metoda aplikována na konkrétní příklad stejně jako v případě rovnice Laplaceovy. Data získaná Fourierovou metodou byla porovnána s daty dosaženými numerickou metodou, a jelikož byla ve shodě, byla tímto ověřena správnost výsledku.

V poslední části této práce bylo zmíněno několik reálných aplikací a dějů, které popisují Laplaceova nebo Poissonova rovnice. Byly zvoleny dva z těchto dějů, první, popsáný Laplaceovou rovnicí, bylo rozložení teploty na desce a druhý, popsáný rovnicí Poissonovou, byl průhyb tenké pružné membrány. Pro oba tyto děje bylo formulováno konkrétní zadání a tyto příklady byly vyřešeny Fourierovou metodou. V této práci byly uvedeny pouze grafická zobrazení výsledků těchto příkladů.

Tato práce splnila cíle, které byly zadány, jelikož byla nalezena řešení Laplaceovy a Poissonovy pomocí Fourierovy metody. Hodnocení této metody je však složité, jelikož obecně nelze říci, kolik

členů Fourierovy řady je třeba sečíst pro dosažení určité přesnosti. Tato skutečnost je velmi závislá na okrajových podmínkách. Obecně lze ovšem tvrdit, že při aproximativním řešení lze Fourierovou metodou rapidně zkrátit zdlouhavé výpočty pomocí numerických metod.

Tato práce by se dala dále rozvíjet vytvořením programu s grafickým prostředím, kde by uživatel zadával velikost oblasti, dělení oblasti, počet sečtených členů Fourierovy řady, okrajové podmínky a rovnici, kterou by chtěl řešit. Tento program by poté po uplynutí doby výpočtu vrátil výsledek v podobě dat a trojdimenzionálního grafu.

6 Literatura

1. Strauss, Walter A. *Partial differential equations: an introduction*. New York : Wiley, 2009. 978-0470-05456-7.
2. Fořt, Jaroslav a Neustupa, Jiří. *Parciální diferenciální rovnice*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2000. 80-01-02268-4.
3. Herrmann, Leopold. *Fourierovy řady: komentované přednášky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2002. 80-01-02603-5.
4. Navara, Mirko a Němeček, Aleš. *Numerické metody*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2003. 80-01-02689-2.
5. Benda, Josef a Černá, Růžena. *Numerická matematika: doplňkové skriptum*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1994. 80-01-01216-6.
6. Saad, Yousef . *Iterative methods for sparse linear systems. 2nd ed.* Philadelphia : SIAM, 2003. 978-0-898715-34-7.
7. Míka, Stanislav, Přikryl, Petr a Brandner, Marek. *Speciální numerické metody: numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice*. Plzeň : Vydavatelský servis, 2006. 80-86843-13-0.
8. Selvadurai, A.P.S. *Partial Differential Equations in Mechanics 2*. Berlin : Springer, 2000. 978-3-662-09205-7.

7 Seznam tabulek

Tabulka 1 - Srovnání doby výpočtu a chyby vůči numerické metodě LR v závislosti na počtu sečtených členů řady	39
Tabulka 2 - Srovnání doby výpočtu a chyby vůči numerické metodě PR v závislosti na počtu sečtených členů řady	51

8 Seznam obrázků

Obrázek 1 - Sousední uzly	9
Obrázek 2 - Síť na oblasti Ω	10
Obrázek 3 - Centrální diference.....	10
Obrázek 4 - Rozdělení matice A	15
Obrázek 5 - Oblast řešení.....	20
Obrázek 6 - Rozložení okrajových podmínek	22
Obrázek 7 - Výsledek pro $k = 10$ LR	36
Obrázek 8 - Výsledek pro $k = 50$ LR	36
Obrázek 9 - Výsledek pro $k = 1800$ LR	37
Obrázek 10 - Isokřivky pro $k = 1800$ LR	37
Obrázek 11 - Chyba v rohu oblasti LR	39
Obrázek 12 - Rozdíl Fourierovy a numerické metody pro LR.....	40
Obrázek 13 - Výsledek numerické metody pro LR	40
Obrázek 14 - Výsledek pro $k = 1800$ PR	48
Obrázek 15 - Isokřivky pro $k = 1800$ PR.....	48
Obrázek 16 - Chyba v rohu oblasti PR	50
Obrázek 17 - Rozdíl Fourierovy a numerické metody pro PR	50
Obrázek 18 - Výsledek numerické metody pro PR.....	51
Obrázek 19 - Rozložení teploty	53
Obrázek 20 - Isokřivky rozložení teploty	53
Obrázek 21 - Průhyb membrány	55
Obrázek 22 - Isokřivky průhybu membrány	55

9 Seznam použitého softwaru

Dev – C++ verze 5.11

Microsoft Word 2016

Matlab verze R2018a

CorelDRAW 2019

10 Přílohy

10.1 C++ kód Fourierova metoda

```
#include<vector>
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<fstream>
#include<iomanip>
#include<string>
#include<tgmath.h>
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<cmath>

using namespace std;

int main(void)
{
    int SeriesMembers = ; //počet členů Fourierovy řady
    float h = ; //dělení oblasti
    const int L = ; //délka oblasti ve směru osy x
    const int S = ; //délka oblasti ve směru osy y
    const float O = round((L/h)+1);
    const int N = static_cast<int>(O);
    const float P = round((S/h)+1);
    const int R = static_cast<int>(P);
    long double tmp = 0;
    long double ** sumau;
    long double y[R];
    long double x[N];
    int i, j, k;

    FILE*fw;
    FILE*fV;
    FILE*fu;

    sumau = (long double**)calloc(N, sizeof(*sumau));
    for (i = 0; i < N; i++) {
        sumau[i] = (long double*)calloc(R, sizeof(**sumau));
    }

    fv = fopen("Y.dat", "w");

    for (i = 0; i < R; i++) {
        y[i] = i * h;
        fprintf(fv, "%Lf ", y[i]);
        fprintf(fv, "\n");
    }

    fclose(fv);
```

```

fu = fopen("X.dat", "w");

for (i = 0; i < N; i++) {
    x[i] = i * h;
    fprintf(fu, "%Lf ", x[i]);
    fprintf(fu, "\n");
}

fclose(fu);

for (i = 0; i < N; i++) {
    for (j = 0; j < R; j++) {
        for (k = 1; k <= SeriesMembers; k++) {
            if (!(k % 2)) {
                tmp = ; //odvozený vztah pro k sudé
            }
            else {
                tmp = ; //odvozený vztah pro k liché
            }
            sumau[i][j] += tmp;
        }
    }
}

fw = fopen("fourierovametoda.dat", "w");

for (i = 0; i < N; i++) {
    for (j = 0; j < R; j++) {
        fprintf(fw, "%Lf ", sumau[i][j]);
    }
    fprintf(fw, "\n");
}

fclose(fw);

for (i = 0; i < N; i++) {
    free(sumau[i]);
}
free(sumau);

return (0);
}

```

10.2 C++ kód numerická metoda

```
#include<vector>
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<fstream>
#include<iomanip>
#include<string>
#include<tgmath.h>
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<cmath>

using namespace std;

int main(void)
{
    float h = ; //dělení oblasti
    double res = ; //velikost residua při kterém se ukončí výpočet
    const int L = ; //délka oblasti ve směru osy x
    const int S = ; //délka oblasti ve směru osy y
    const float O = round((L/h)+1);
    const int N = static_cast<int>(O);
    const float P = round((S/h)+1);
    const int R = static_cast<int>(P);
    long double ** U;
    long double ** Us;
    long double y[R];
    long double x[N];
    long double reziduum = 1;
    long double rho = (cos(M_PI/(L/h))+cos(M_PI/(S/h)))/2;
    long double omega = 2/(1+sqrt(1-pow(rho,2)));
    long double F;
    int i, j, k;

    FILE*f;
    FILE*fu;
    FILE*fw;

    U = (long double**)calloc(N, sizeof(*U));

    for (i = 0; i < N; i++)
    {
        U[i] = (long double*)calloc(R, sizeof(**U));
    }

    Us = (long double**)calloc(N, sizeof(*Us));

    for (i = 0; i < N; i++)
    {
        Us[i] = (long double*)calloc(R, sizeof(**Us));
    }
}
```



```

fv = fopen("Y.dat", "w");
for (i = 0; i < R; i++)
{
    y[i] = i * h;
    U[0][i] = ; //okrajová podmínka u3
    U[N-1][i] = ; //okrajová podmínka u4
    Us[0][i] = ; //okrajová podmínka u3
    Us[N-1][i] = ; //okrajová podmínka u4
    fprintf(fv, "%Lf ", y[i]);
    fprintf(fv, "\n");
}
fclose(fv);

fu = fopen("X.dat", "w");
for (i = 0; i < N; i++)
{
    x[i] = i * h;
    U[i][0] = ; //okrajová podmínka u1
    U[i][R-1] = ; //okrajová podmínka u2
    Us[i][0] = ; //okrajová podmínka u1
    Us[i][R-1] = ; //okrajová podmínka u2
    fprintf(fu, "%Lf ", x[i]);
    fprintf(fu, "\n");
}
fclose(fu);

while (reziduum>res)
{
    for (i = 1; i < N-1; i++)
    {
        for (j = 1; j < R-1; j++)
        {
            F = ; //funkce pravé strany

            U[i][j] =
            U[i][j]+omega*(((U[i+1][j]+
            U[i-1][j]+U[i][j+1]+
            U[i][j-1]-(pow(h, 2)*F))/4)-U[i][j]);

            reziduum = abs(U[i][j]-Us[i][j]);

            Us[i][j] = U[i][j];
        }
    }
}

fw = fopen("numerickametoda.dat", "w");
for (i = 0; i < N; i++) {
    for (j = 0; j < R; j++) {
        fprintf(fw, "%Lf ", Us[i][j]);
    }
    fprintf(fw, "\n");
}
fclose(fw);

return(0);
}

```